

## О задаче вычислительной векторной гравиметрии

© А.С. Девятисильный

Институт автоматизации и процессов управления Дальневосточного отделения РАН,  
690041 Владивосток, Россия  
e-mail: devyatis@iacp.dvo.ru

(Поступило в Редакцию 18 ноября 2005 г.)

Для технического обеспечения векторной задачи наземной гравиметрии, формируемой в рамках инерциального метода, предлагается использовать неуправляемую приборную платформу, что позволяет процесс решения задачи сосредоточить в вычислительной среде. Представлены оценки разрешимости и точности решения задачи, полученные в ходе вычислительного эксперимента.

PACS: 04.80.Cc

Сильнейшим землетрясениям, как показывает опыт их изучения [1], сопутствуют заметные (до  $0.001 \text{ m/s}^2$ ) возмущения напряженности гравитационного поля ( $GR$ -поля), которые проявляются в течение нескольких месяцев как до, так и после землетрясений на расстоянии до  $100 \text{ km}$  от эпицентров. При анализе таких возмущений как предвестников землетрясений немаловажное значение приобретает информация об их горизонтальных компонентах [1], что актуализирует проблему пространственной, или векторной, гравиметрии. Соответствующая задача обсуждалась в [2] в рамках метода инерциальной навигации (ИНМ) при погружении ее в задачу наземной выставки инерциальной навигационной системы (ИНС); по сути — это проблемно-ориентированная интерпретация одной из двух фундаментальных задач динамики, а именно первой (по [3]), или обратной (по [4,5]) — определение сил по заданной траектории.

В настоящей работе в контексте обозначенной онтологии приводятся новые положения и результаты вычислительного эксперимента, развивающие представления о векторной гравиметрии как об инструменте и предмете исследования.

Начнем с методологического аспекта задачи, так как именно им и определяется название этой статьи в части применения прилагательного „вычислительная“. Как известно, современная концепция ИНМ ориентирована на развитие так называемых бесплатформенных ИНС [6], где приборному координатному трехграннику (обозначим его  $ou = ou_1u_2u_3$ ), в осях которого выполняются инерциальные измерения (с помощью гироскопов и ньютонометров), не предписывается какая-либо выделенная ориентация (для сравнения, например, в [2] говорилось о географической ориентации  $ou$ ). Это означает, что из процесса решения навигационной задачи исключаются обладающие известной грубостью электромеханические преобразования, осуществляемые системой управления платформой как твердым телом. Таким образом, весь процесс обработки инерциальной информации, с которым отождествляется процесс решения задачи, оказывается сосредоточенным исключительно в ЭВМ, в вычис-

лительной среде которой формируется и виртуальный образ приборного трехгранника.

Именно в рамках указанной концепции ИНМ интерпретируется рассматриваемая здесь задача гравиметрии, что и определяет ее как задачу вычислительной векторной гравиметрии (ВВГ).

Определившись с генезисом задачи ВВГ перейдем к ее формальному описанию, используя в качестве исходных модельные представления из [2,7]. Тогда эволюционная часть модели ВВГ (в малом) принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} D_{ik}\delta q_k &= \delta p_i + Q_{ik}v_k, & \delta q_i(0) &= \delta q_{i,0}, \\ D_{ik}\delta p_k &= \delta G_i(q) + f_i + P_{ik}v_k, & \delta p_i(0) &= \delta p_{i,0}, \\ D_{ik}\beta_k &= v_i, & \beta_i(0) &= \beta_{i,0}, \end{aligned} \quad (1)$$

а условия (в малом) на траектории (точнее, в точке на поверхности Земли) как результат использования дополнительной по отношению к инерциальной информации (полагаем, что ее источником является спутниковая навигационная система, СНС) вид

$$\begin{aligned} J_i^q &= \delta q_i + Q_{ik}\beta_k + \varepsilon_i^q, \\ J_i^p &= \delta p_i + W_{ik}\beta_k + \varepsilon_i^p. \end{aligned} \quad (2)$$

В уравнениях (1) и (2)  $\delta q = (\delta q_i)$ ,  $\delta p = (\delta p_i)$ ,  $\delta G(q) = (\delta G_i(q))$  — соответственно вариации векторов положения ( $q$ ), импульса ( $p$ ) и напряженности  $GR$ -поля,  $G(q); \beta = (\beta_i)$  — вектор малого угла поворота виртуального (расчетного) координатного трехгранника относительно физически реализуемого приборного трехгранника  $ou$ ;  $f = (f_i)$  и  $v = (v_i)$  — векторы инструментальных погрешностей инерциальных измерителей (ньютонометров и гироскопов);  $D_{ik} = \delta_{ik}d/dt - \Omega_{ik}$  — оператор абсолютного дифференцирования;  $\Omega_{ik} = -e_{ijk}\omega_j$ ;  $\delta_{ik}$  и  $e_{ijk}$  — символы соответственно Кронекера и Леви-Чивита;  $\omega = (\omega_i)$  — вектор угловой скорости вращения Земли в проекциях на оси трехгранника  $ou$ ;  $Q_{ik} = e_{ijk}q_j$ ;  $P_{ik} = -e_{ijk}p_j$ ;  $W_{ik} = e_{imk}Q_{ms}\omega_s$ ;  $\varepsilon^q = (\varepsilon_i^q)$  и  $\varepsilon^p = (\varepsilon_i^p)$  — векторы инструментальных погрешностей СНС-измерений, причем  $\varepsilon_i^p = -\Omega_{ik}\varepsilon_k^q$ . Все нижние индексы принимают (если нет специальных оговорок)

значения  $n = 1, 2, 3$ , и для них действует правило Эйнштейна (суммирование по повторяющимся индексам).

Обратимся теперь к интерпретации  $\delta G(q)$  — важнейшей части модели (1), определяющей суть и цели всей задачи ВВГ. Если  $G$  и  $\tilde{G}$  — истинная напряженность  $GR$ -поля и ее модель, то  $g = G - \tilde{G}$  — аномалия, подлежащая определению. Тогда, полагая, что на временном интервале наблюдения  $G$  не изменяется, есть все основания принять  $\delta G(q) = g = \text{const}$ .

Заметим, что в [2] исходным было представление вида  $\delta G(q) = (\partial G / \partial q) \delta q + g$ ,  $g = \text{const}$ , где первое слагаемое ( $G' \delta q$ ) сохраняло традиционный для метода (навигационный) характер задачи в том числе и возможные аналогии с баллистически невозмущаемыми системами [7]. Вновь введенное представление  $\delta G(q) = g = \text{const}$  исключает возможность указанных аналогий, определяет собственное „лицо“ рассматриваемой (наземной) задачи ВВГ, но вместе с тем не выводит ее за рамки ИНМ. Принимая во внимание только что изложенное, уравнения (1) должны быть дополнены условиями  $\dot{g}_i = 0$ ,  $g_i(0) = g_{i,0}$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

Дальнейшее расширение модели ВВГ связано с описанием погрешностей  $f$  и  $v$ , относительно которых примем, что они являются случайными марковскими стационарными процессами первого порядка с коэффициентами сноса и диффузии, характеризуемыми парами:  $(\lambda_i^f, \sigma_i^f)$ ,  $i = 1, 2, 3$  — для ньютометров и  $(\lambda_i^v, \sigma_i^v)$ ,  $i = 1, 2, 3$  — для гироскопов.

Таким образом, задача оценки вектора  $g$  ( $\dim g = 3$ ) погружена в расширенную задачу оценки совокупности векторов  $\{\delta q, \delta p, \beta, g, f, v\}$  общей размерности  $\dim = 18$ .

Переходя к алгоритмическому аспекту решения расширенной задачи, приведем ее модель „состояние–измерение“ к виду, характерному для задачи метода наименьших квадратов (МНК), а именно:

$$J(k) = h(k)x + \eta(k), \quad k = 0, N, \quad (3)$$

где  $k$  — индекс момента времени измерений, так что  $t_{k+1} = t_k + h$ ,  $h = \text{const}$ ;  $x$  — вектор состояния ( $\dim x = 18$ ) процесса, описываемого расширенным уравнением (1), в выделенный, вообще говоря, произвольный, момент времени  $t^*$  (далее примем  $t^* = t_0$ );  $J(k) = J(t_k)$  — вектор измерений (2) в  $k$ -й момент времени ( $\dim J(k) = 6$ );  $h(k)$  — оператор ( $\dim h(k) = 6 \times 18$ ), вычисляемый с любой заданной точностью, благодаря тому что фундаментальная матрица решений для расширенного эволюционного уравнения (1) представима матричной экспонентой;  $\eta(k)$  — вектор случайных возмущений ( $\dim \eta(k) = 6$ ), порождаемый погрешностями инерциальных измерителей и СНС.

Модель (3) удобна тем, что ее полный оператор  $H = (h(k))$ ,  $k = 0, N$  ( $\dim H = 6(N + 1) \times 18$ ) непосредственно доступен для сингулярного анализа, что

облегчает исследование разрешимости задачи в вычислительных средах с различной точностью ( $\varepsilon_1$ ) представления чисел.

При решении задачи (3) возможна реализация двух типов оценки — точечной, связанной с псевдообращением оператора  $H$  (например, при использовании МНК), и рекуррентной, по сути требующей пошагового псевдообращения оператора  $h(k)$ . Последняя может быть выполнена на базе дискретной калмановской процедуры [8], если модель (3) формально дополнить уравнением „эволюции“  $x(k + 1) = x(k)$ .

В соответствии с вышеизложенным для оценки эффективности предлагаемого инерциального метода гравиметрии значительная роль была отведена вычислительному эксперименту, целью которого были исследование корректности математической модели рассматриваемой физической задачи и оценка точности ее решения с учетом существующих возможностей технологий инерциальных и спутниковых измерений.

Ниже приводятся результаты численного эксперимента, имитирующего процесс ВВГ на географической широте места  $\varphi = 45^\circ$ . Они достаточно полно характеризуют метод.

Прежде всего отметим невысокую степень разрешимости задачи, характеризуемую числом обусловленности  $\mu$  оператора  $H$ , которое достигает значения  $\mu \approx 10^{13}$ . Таким образом, при погружении задачи в стандартную вычислительную среду с небольшой относительной точностью  $\varepsilon_1 \approx 10^{-16} - 10^{-19}$  либо происходит потеря устойчивости решения (что особенно заметно при МНК-решении), либо наблюдается весьма заметное сдерживание улучшения его качества (точности) при повышении точности измерений (что проявляется при калмановском решении).

На рис. 1 представлены графики эволюции значений погрешностей ( $\Delta g_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ ) оценок компонент вектора  $g$ , а на рис. 2 — соответствующих им ( $\sigma_i^{\Delta g}$ ,  $i = 1, 2, 3$ ) значений среднеквадратических погрешностей (СКП).

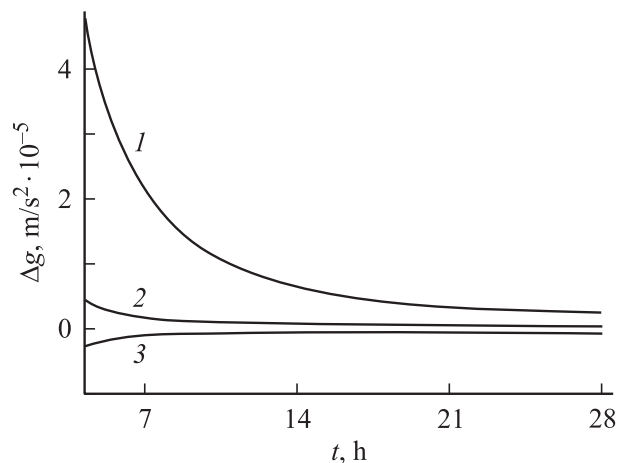


Рис. 1. Погрешности оценивания: 1 —  $\Delta g_1$ , 2 —  $\Delta g_2$ , 3 —  $\Delta g_3$ .

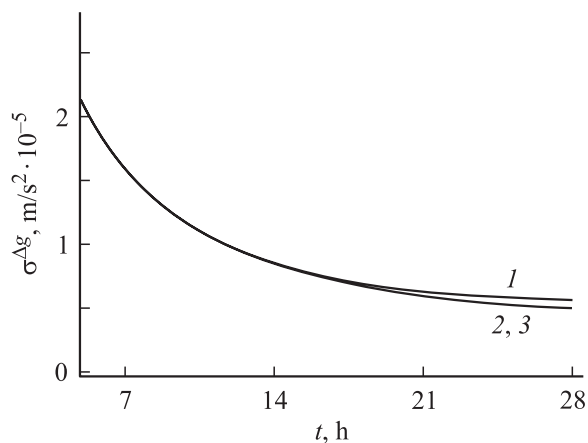


Рис. 2. Среднеквадратические значения погрешностей: 1 —  $\sigma_1^{\Delta g}$ , 2 —  $\sigma_2^{\Delta g}$ , 3 —  $\sigma_3^{\Delta g}$ .

Численное моделирование задачи выполнено при  $\varepsilon_1 = 10^{-16}$  для отражающих реальные возможности современных технологий значений параметров точности инерциальных и СНС-измерителей, а именно:  $\sigma_i^v = 0.001^\circ/h$ ,  $\lambda_i^v = 10^{-3} s^{-1}$ ,  $\sigma_i^f = 0.001 m/s^2$ ,  $\lambda_i^f = 10^{-2} s^{-1}$ ,  $\sigma_i^e = 1 m$ ,  $i = 1, 2, 3$ . В качестве алгоритма решения выбран фильтр Калмана, реализованный на базе модели, описанной ранее. Достигнутая точность оценки аномалии в этих условиях равна  $10^{-6} m/s^2$ ; кроме того, что также показал эксперимент, достигнутая при этом точность оценки взаимной ориентации виртуального и приборного трехгранников характеризуется значением  $10^{-5} rad$ .

Как видно из представленных результатов численного эксперимента даже при сравнительно невысоких (по крайней мере, выполняемых в настоящее время) требованиях к измерителям в рассматриваемой задаче достаточно высокой размерности можно получать вполне приемлемые по точности оценки локальной напряженности гравитационного поля.

Таким образом, в работе предложен новый метод устойчивого решения задачи пространственной гравиметрии на неуправляемой измерительной платформе, свободный, следовательно, от электромеханических преобразований и ориентированный на полное погружение задачи в высокопроизводительную вычислительную среду. Предложенные результаты численного эксперимента свидетельствуют о прикладной перспективе метода.

## Список литературы

- [1] Иванов В.В. // Измерение гравитационных аномалий при сильнейших землетрясениях / Под ред. В.Н. Храмушина. Владивосток: ДВО РАН, 2005. Вып. 1. С. 60–68.
- [2] Девятисильный А.С. // ЖТФ. 2005. Т. 75. Вып. 7. С. 140–142.
- [3] Ишлинский А.Ю. Классическая механика и силы инерции. М.: Наука, 1987. 320 с.

- [4] Сулов Г.К. О силовой функции, допускающей данные интервалы. Киев, 1890.
- [5] Галиуллин А.С. Обратные задачи динамики. М., 1981.
- [6] Inertial Navigation: Analysis and Design / Ed. by C.F. O'Donnell. New York: Mc-Graw-Hill, 1964.
- [7] Андреев В.Д. Теория инерциальной навигации. Корректируемые системы. М.: Наука, 1967. 648 с.
- [8] Meditch J.S. Stochastic Optimal Linear Estimation and Control. New York: Mc-Graw-Hill, 1969.