

01;03

К расчету стационарных магнитогидродинамических течений жидких металлов в кольцевых каналах прямоугольного сечения

© И.В. Хальзов, А.И. Смоляков

Российский научный центр „Курчатовский институт“,
123182 Москва, Россия
e-mail: halzovi@mail.ru, smolyakov@sask.usask.ca

(Поступило в Редакцию 6 апреля 2005 г.)

Разработан численный код для расчета двумерных стационарных магнитогидродинамических (МГД) течений несжимаемых проводящих вязких жидкостей (жидких металлов) в прямых и кольцевых каналах прямоугольного сечения с тонкими стенками. Течения обусловлены силой Лоренца $\mathbf{j} \times \mathbf{V}$, которая возникает при пропускании электрического тока через жидкость, помещенную в вертикальное однородное магнитное поле. Код является обобщением известного итерационного метода Гаусса–Зейделя на случай систем уравнений эллиптического типа. Данный метод позволяет проводить расчеты стационарных течений в широком диапазоне чисел Гартмана ($Ha = 1-10^3$) и Рейнольдса ($Re = 1-10^6$).

PACS: 47.90.+a, 47.85.M

Введение

Определение структуры стационарных МГД течений проводящих жидкостей в каналах различной геометрии непосредственно связано с рядом инженерных приложений. Наиболее важным с точки зрения практического применения является случай прямого канала прямоугольного сечения, так как он лежит в основе МГД генераторов, электромагнитных насосов, систем охлаждения ядерных реакторов и т.д. Интерес к течениям в кольцевых каналах возник не так давно и обусловлен попытками исследовать так называемую магниторотационную неустойчивость (МРН) в лабораторных условиях [1,2]. Впервые открытая Е.П. Велиховым [3] МРН, по всей видимости, играет значительную роль в динамике таких астрофизических объектов, как аккреционные диски и спиральные галактики [4]. В последнее десятилетие появилось значительное количество работ, посвященных как аналитическому, так и численному моделированию различных аспектов МРН. Однако до сих пор не было прямых наблюдений этой неустойчивости ни в природе, ни в лабораторных экспериментах.

С целью лабораторного исследования МРН недавно был предложен эксперимент [5], в котором жидкий натрий, помещенный в сильное магнитное поле, приводится во вращение поперечным электрическим током. Создание соответствующей экспериментальной установки с кольцевым каналом прямоугольного сечения планируется в Физико-энергетическом институте (г. Обнинск) в содружестве с Курчатовским институтом. Определение характеристик стационарных МГД течений при планируемых параметрах установки является стартовой точкой для исследования МРН.

Теоретическому анализу стационарных МГД течений в каналах прямоугольного сечения посвящен ряд работ. Так, Брагинский [6] разработал для описания течений гальваническое приближение, которое справедливо

при малых магнитных числах Рейнольдса ($Re_m \ll 1$). Хант [7] получил точные решения, описывающие некоторые течения в прямых каналах. Хант и Стюартсон [8] разработали асимптотический метод для анализа течений в прямых каналах при больших числах Гартмана ($Ha \gg 1$), который впоследствии был уточнен [9] и обобщен на случай кольцевых каналов [10].

Несмотря на эти попытки, до сих пор не найдено удовлетворительного аналитического приближения, описывающего течения при любых числах Гартмана в прямых и кольцевых каналах прямоугольного сечения со стенками произвольной проводимости. Поэтому главную роль здесь играют численные методы.

Для расчета стационарных МГД течений в каналах прямоугольного сечения были разработаны многочисленные коды, основу которых составляют прямые спектральные методы, т.е. разложение неизвестных величин по некоторому базису и вычисление коэффициентов разложения. К таковым можно отнести метод конечных элементов (см., например, [11] и ссылки в ней), метод конечных объемов [12,13], метод дифференциальных квадратур [14]. Эти методы в принципе не накладывают ограничений на значения чисел Гартмана и допускают обобщение на нестационарный (динамический) случай.

Цель данной работы — демонстрация нового кода для расчета течений жидких металлов в каналах прямоугольного сечения. Первоначально код разрабатывался с целью определения структуры стационарных МГД течений жидкого натрия в экспериментальных установках по изучению МРН, впоследствии он был адаптирован к расчету течений в прямых каналах. Основу кода составляет итерационный метод Гаусса–Зейделя решения уравнений эллиптического типа. Этот метод содержит положительные свойства, присущие всем итерационным схемам, такие как относительная простота схемы, гладкость получаемого решения, необходимость хранения в памяти на каждом шаге только $O(N^2)$ чисел, где N —

число узлов сетки в каждом направлении. В то же время быстродействие данного метода составляет $O(N^3)$, что сравнимо с самыми быстрыми прямыми спектральными методами, для которых быстродействие определяется как $O(N^2 \ln N)$. Анализ устойчивости и сходимости предлагаемого метода мы оставляем за рамками данной статьи.

Структура статьи следующая. В разделе 1 приведены уравнения, описывающие стационарные течения жидких металлов, и формулируются граничные условия к ним. Затем эти уравнения рассмотрены в геометрии кольцевого канала и приводятся к виду, удобному для численного счета. В разделе 2 изложены характерные особенности разработанного численного метода. В разделе 3 приведены результаты расчетов профилей скорости и магнитного поля для параметров проектируемой установки по изучению МРН. В разделе 4 сделаны выводы о применимости данного численного метода к расчету течений.

1. Постановка задачи

Рассмотрим задачу об отыскании стационарных (полностью развившихся) течений несжимаемой диссипативной жидкости в кольцевом канале прямоугольного сечения (рис. 1). Канал представляет собой осесимметричный тороид, ось симметрии которого совпадает с осью Z цилиндрической системы координат (R, φ, Z) . Также сделаем следующие предположения: 1) жидкость однородна, обладает постоянными во всем объеме плотностью ρ , кинематической вязкостью ν и проводимостью σ ; 2) жидкость полностью заполняет канал; 3) боковые стенки канала ($R = R_{\pm}$) идеально проводящие, дно и крышка ($Z = \pm a$) — изоляторы; 4) канал помещен во внешнее однородное магнитное поле, которое направлено вдоль оси Z : $\mathbf{B}_0 = B_0 \mathbf{e}_z$; 5) электрический ток подводится к жидкости через внешнюю ($R = R_+$) и отводится через внутреннюю ($R = R_-$) боковые стенки.

Нетрудно видеть, что эти предположения не нарушают осевой симметрии, связанной с геометрией канала. Данное обстоятельство позволяет нам существенно упростить задачу и свести ее к отысканию двумерных течений.

Стационарные течения несжимаемых проводящих вязких жидкостей в магнитном поле описываются уравнениями стандартной диссипативной МГД (см., например, [15])

$$(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{V} = -\nabla \frac{P}{\rho} + \nu \Delta \mathbf{V} + \frac{1}{c\rho} \mathbf{J} \times \mathbf{B}, \quad (1)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{V} = 0, \quad (2)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}, \quad (3)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad (4)$$

$$\mathbf{J} = \sigma(-\nabla\Phi + \frac{1}{c} \mathbf{V} \times \mathbf{B}). \quad (5)$$

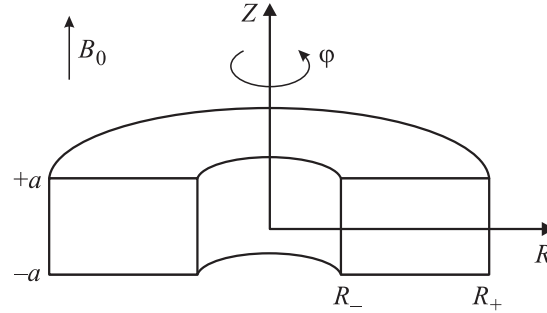


Рис. 1. Кольцевой канал.

Здесь приняты типичные обозначения: \mathbf{V} — поле скоростей жидкости, \mathbf{B} — полное магнитное поле (внешнее и индуцированное), Φ — электрический потенциал, \mathbf{J} — плотность электрического тока, P — давление, c — скорость света в вакууме. Физический смысл этой системы достаточно очевиден. Уравнение (1), описывающее баланс сил, является уравнением Навье–Стокса с учетом силы Лоренца. Уравнение (2) задает условие несжимаемости жидкости. Уравнения (3), (4) — это уравнения Максвелла для магнитного поля, а уравнение (5) представляет собой закон Ома в движущейся среде.

Для дальнейшего анализа этих уравнений оказывается удобным перейти к безразмерным величинам таким образом, что

$$\mathbf{V} = V_0 \mathbf{v}, \quad \mathbf{B} = B_0 \mathbf{b}, \quad \mathbf{R} = a \mathbf{r},$$

$$P = \rho V_0^2 p, \quad \Phi = \frac{V_0}{c} a B_0 \varphi,$$

где V_0 — характерная скорость жидкости, B_0 — внешнее магнитное поле, \mathbf{R} — радиус-вектор, a — полувысота канала.

Тогда система (1)–(5) переписывается как

$$(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = -\nabla p + \operatorname{Re}^{-1} \Delta \mathbf{v} + \operatorname{Al} \operatorname{rot} \mathbf{b} \times \mathbf{b}, \quad (6)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad (7)$$

$$\nabla \varphi = \mathbf{v} \times \mathbf{b} - \operatorname{Re}_m^{-1} \operatorname{rot} \mathbf{b}, \quad (8)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{b} = 0, \quad (9)$$

где введены следующие безразмерные параметры:

$$\operatorname{Re} = \frac{aV_0}{\nu}, \quad \operatorname{Re}_m = \frac{4\pi\sigma aV_0}{c^2}, \quad \operatorname{Al} = \frac{B_0^2}{4\pi\rho V_0^2}$$

— число Рейнольдса, магнитное число Рейнольдса и число Альфвена соответственно.

При этом границами канала будут боковые стенки Γ_1 : $r = r_{\pm} = R_{\pm}/a$, крышка и дно Γ_2 : $z = \pm 1$.

Для однозначного определения входящих в систему (6)–(9) неизвестных величин необходимо задать граничные условия. Стандартное гидродинамическое усло-

вие состоит в требовании обращения в нуль скорости вязкой жидкости на неподвижных твердых стенках [16]

$$\mathbf{V}|_{\Gamma_1, \Gamma_2} = 0. \quad (10)$$

Граничные условия для электрического тока определяются проводимостью стенок. На непроводящих стенках при $Z = \pm a$ мы имеем

$$J_z|_{Z=\pm a} = 0$$

— отсутствие нормального тока на поверхности изолятора.

На идеально проводящих стенках должно выполняться условие эквипотенциальности ($\Phi = \text{const}$ вдоль стенки), что означает отсутствие тангенциальной компоненты электрического поля ($E_t = 0$). В этом случае закон Ома (5) и условие (10) дают

$$J_t|_{R=R_{\pm}} = 0,$$

где J_t — тангенциальная компонента плотности тока.

Перепишывая два последних условия с учетом (3) в безразмерном виде, имеем

$$(\text{rot } \mathbf{b})_z|_{\Gamma_2} = 0, \quad (11)$$

$$(\text{rot } \mathbf{b})_t|_{\Gamma_1} = 0. \quad (12)$$

Кроме того, отсутствие тангенциального тока на боковых поверхностях канала приводит к непрерывности тангенциального магнитного поля на этих поверхностях, что следует из уравнения Максвелла (3). Это условие и условие непрерывности нормальной компоненты магнитного поля на дне и крышке канала дают (с учетом обезразмеривания)

$$b_z|_{\Gamma_1, \Gamma_2} = 1. \quad (13)$$

Будем решать систему уравнений (6)–(9) с граничными условиями (10)–(13) в геометрии кольцевого канала (рис. 1), предполагая наличие осевой симметрии ($\partial/\partial\varphi = 0$). В этом случае оказывается удобным перейти к представлению поля скоростей и магнитного поля в таком виде, что уравнения (7) и (9) выполнены автоматически, а именно вводим потоковые функции $\chi(r, z)$ и $\psi(r, z)$ так, что

$$\mathbf{v} = \nabla\chi(r, z) \times \nabla\varphi + u(r, z)\nabla\varphi, \quad (14)$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{e}_z + \nabla\psi(r, z) \times \nabla\varphi + I(r, z)\nabla\varphi. \quad (15)$$

Здесь $u(r, z)$ имеет смысл обезразмеренного углового момента импульса

$$u(r, z) = \frac{RV(R, Z)}{M_0},$$

где $V(R, Z)$ — тороидальная скорость, M_0 — характерная величина углового момента, $R = ar$, $Z = az$.

Тогда уравнения (6) и (8) в проекции на азимутальное направление ($\sim \nabla\varphi$) дают соответственно

$$\frac{1}{r} [\chi, u] = \frac{1}{\text{Re}} \Delta^* u + \text{Al}(I'_z + \frac{1}{r} [\psi, I]), \quad (16)$$

$$0 = \chi'_z + \frac{1}{r} [\psi, \chi] + \frac{1}{\text{Re}_m} \Delta^* \psi, \quad (17)$$

где введены обозначения

$$[f, g] \equiv \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial g}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial g}{\partial r}, \quad \Delta^* = r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Исключим неизвестные p и φ из уравнений (6) и (8), взяв от них ротор. Имеем

$$r \left[\frac{\Delta^* \chi}{r^2}, \chi \right] + r \left[\frac{u}{r^2}, u \right] = -\frac{1}{\text{Re}} \Delta^* \Delta^* \chi + \text{Al} \left(-\Delta^* \psi'_z + r \left[\frac{\Delta^* \psi}{r^2}, \psi \right] + r \left[\frac{\Delta^* I}{r^2}, I \right] \right), \quad (18)$$

$$0 = u'_z + r \left[\psi, \frac{u}{r^2} \right] + r \left[\frac{I}{r^2}, \chi \right] + \frac{1}{\text{Re}_m} \Delta^* I. \quad (19)$$

Таким образом, мы получили систему четырех нелинейных уравнений (16)–(19) с четырьмя неизвестными функциями χ , u , ψ , I . Граничные условия (10)–(13) для этой системы имеют вид

$$u|_{\Gamma_1, \Gamma_2} = 0, \quad (20)$$

$$\nabla\chi|_{\Gamma_1, \Gamma_2} = 0, \quad (21)$$

$$I'_r|_{\Gamma_1, \Gamma_2} = 0, \quad (22)$$

$$\psi'_r|_{\Gamma_1, \Gamma_2} = 0. \quad (23)$$

Заметим, что граничные условия (21) и (23) определяют потоковые функции χ и ψ с точностью до константы. Чтобы устранить эту неоднозначность в численном счете, заметим, что геометрия задачи предполагает также симметрию относительно плоскости $z = 0$, следовательно, искомые функции должны быть либо симметричными, либо асимметричными относительно этой плоскости. В дальнейшем считаем, что ψ — четная, а χ — нечетная функции z . Это предположение не противоречит граничным условиям (21) и (23), а также согласуется с системой (16)–(19), в которой u является четной, а I нечетной функциями z . Нечетность I в свою очередь обоснована простыми физическими соображениями, согласно которым индуцированное магнитное поле в проводниках с током, обладающих плоскостью симметрии, должно быть антисимметричным относительно этой плоскости.

Найдем связь между функцией I и пропускаемым через жидкость электрическим током. Плотность тока есть

$$\mathbf{J} = \frac{c}{4\pi} \text{rot } \mathbf{B} = \frac{cB_0}{4\pi a} \text{rot } \mathbf{b} = \frac{cB_0}{4\pi a} (-\Delta^* \psi \nabla \varphi + \nabla I \times \nabla \varphi).$$

Отсюда видно, что $I(r, z)$ является потоковой функцией для плотности тока, т.е. в плоскости $r-z$ ток течет по линиям $I(r, z) = \text{const}$. Полный радиальный ток в произвольном сечении $R = \text{const}$

$$\begin{aligned} -I_0 &= 2\pi R \int_{-a}^a J_R dZ = -\frac{cRB_0}{2} \int_{-1}^1 \frac{I'_z}{r} dz \\ &= -\frac{caB_0}{2} (I|_{z=1} - I|_{z=-1}), \end{aligned}$$

причем $I_0 > 0$ соответствует току, текущему от внешней стенки канала к внутренней.

В силу нечетности I по z получаем

$$I|_{z=1} = \frac{I_0}{caB_0}. \quad (24)$$

Чтобы найти характерную величину углового момента M_0 , рассмотрим течение в центральной части канала вдали от боковых стенок. В этом случае можно пренебречь радиальной зависимостью параметров течения, т.е. можно предположить, что $\partial/\partial r \rightarrow 0$. Тогда уравнения (16) и (19) сводятся к системе

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{\text{Re}} u''_{zz} + \text{Al} I'_z, \\ 0 &= u'_z + \frac{1}{\text{Re}_m} I''_{zz}; \end{aligned}$$

решением которой с учетом граничных условий (20) и (24) являются функции:

$$u(z) = \frac{I_0 \text{Ha}}{caB_0 \text{Re}_m} \left[\frac{\text{chHa} - \text{ch}(\text{Ha} z)}{\text{shHa}} \right], \quad (25)$$

$$I(z) = \frac{I_0}{caB_0} \left[\frac{\text{sh}(\text{Ha} z)}{\text{shHa}} \right], \quad (26)$$

где введено число Гартмана Ha :

$$\text{Ha}^2 \equiv \text{AlReRe}_m = \frac{a^2 B_0^2 \sigma}{c^2 \rho \nu}.$$

На рис. 2 показана зависимость профиля функции, стоящей в квадратных скобках в выражении (25), от значений числа Гартмана. Видно, что при $\text{Ha} \gg 1$ профиль углового момента $u(z)$ имеет типичную „полочку“ в центральной области (ее значение близко к 1). Это позволяет нам определить характерные величины скорости и углового момента из условия

$$\frac{I_0 \text{Ha}}{caB_0 \text{Re}_m} = 1,$$

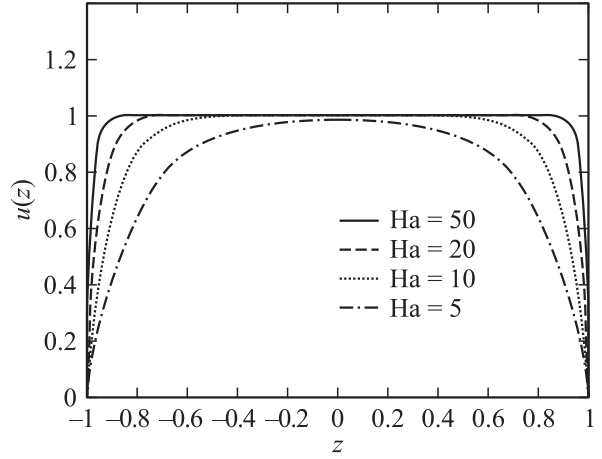


Рис. 2. Профиль функции $u(z) = (\text{ch Ha} - \text{ch}(\text{Ha} z))/\text{sh Ha}$ при различных числах Гартмана Ha .

которое дает

$$M_0 \equiv aV_0 = \frac{I_0}{4\pi \sqrt{\sigma \rho \nu}}. \quad (27)$$

Интересно отметить, что характерное значение углового момента не зависит от величины магнитного поля. Объяснение этого факта приведено в [6].

Для получения системы, удобной для численного счета, сделаем следующие преобразования: $x = r^2$, $u(r, z) = v(x, z)$, $\chi(r, z) = w(x, z)$, $I(r, z) = \text{Re}_m h(x, z)/\text{Ha}$, $\psi(r, z) = \text{Re}_m g(x, z)/\text{Ha}$. Тогда система (16)–(19) приводится к виду

$$0 = \tilde{\Delta} v + \text{Ha} h'_z + 2\text{Re}_m \{g, h\} + 2\text{Re} \{v, w\}, \quad (28)$$

$$\begin{aligned} 0 &= \tilde{\Delta} h + \text{Ha} v'_z \\ &+ 2\text{Re}_m \left(\{h, w\} - \frac{hw'_z}{x} + \{g, v\} + \frac{vg'_z}{x} \right), \end{aligned} \quad (29)$$

$$0 = \tilde{\Delta} g + \text{Ha} w'_z + 2\text{Re}_m \{g, w\}, \quad (30)$$

$$\begin{aligned} 0 &= \tilde{\Delta} \tilde{\Delta} w + \text{Ha} \tilde{\Delta} g'_z + 2\text{Re}_m \left(\{g, \tilde{\Delta} g\} + \frac{g'_z \tilde{\Delta} g}{x} + \frac{hh'_z}{x} \right) \\ &- 2\text{Re} \left(\{w, \tilde{\Delta} w\} + \frac{w'_z \tilde{\Delta} w}{x} + \frac{vv'_z}{x} \right), \end{aligned} \quad (31)$$

где введены обозначения

$$\{f, g\} \equiv \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial g}{\partial x}, \quad \tilde{\Delta} = 4x \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Граничные условия к этим уравнениям с учетом четности g и нечетности w по z запишутся как

$$v|_{x=r_{\pm}^2} = 0, \quad v|_{z=\pm 1} = 0, \quad (32)$$

$$h'_x|_{x=r_{\pm}^2} = 0, \quad h|_{z=\pm 1} = \pm 1, \quad (33)$$

$$g'_x|_{x=r_{\pm}^2} = 0, \quad g|_{z=\pm 1} = 0, \quad (34)$$

$$w|_{x=r_{\pm}^2} = 0, \quad w|_{z=\pm 1} = 0, \quad (35)$$

$$w'_x|_{x=r_{\pm}^2} = 0, \quad w'_z|_{z=\pm 1} = 0. \quad (36)$$

Связь функций v , w , h и g с реальными физическими величинами имеет вид

$$\mathbf{V}(R, Z) = V_0(\nabla w(r^2, z) \times \nabla \varphi + v(r^2, z)\nabla \varphi), \quad (37)$$

$$\mathbf{B}(R, Z) = B_0 \mathbf{e}_z + \frac{\text{Re}_m}{\text{Ha}} B_0 \left(\nabla g(r^2, z) \times \nabla \varphi + h(r^2, z)\nabla \varphi \right). \quad (38)$$

2. Численный метод

В этой главе описан численный метод, разработанный нами для решения систем уравнений эллиптического типа, каковой является система (28)–(31). Данный метод обобщает известный итерационный алгоритм Гаусса–Зейделя и содержит все его характерные особенности. Проиллюстрируем их на простом примере — решения уравнения Пуассона (более подробное изложение смотрите, например, в [17]). Уравнение Пуассона для двумерной функции $\phi(x, y)$ записывается как

$$\phi''_{xx} + \phi''_{yy} = f(x, y), \quad (39)$$

где $f(x, y)$ — заданная функция.

Будем решать это уравнение в квадратной области, считая, что на искомую функцию ϕ заданы граничные условия, определяющие ее однозначным образом (здесь мы не конкретизируем выбор граничных условий). Для этого введем квадратную сетку с равным шагом по x и по y : $\delta x = \delta y = s$. Точки этой сетки можно пронумеровать парой индексов (i, j) , где i и j пробегает значения от 0 до N . Если (x_0, y_0) — координаты левого нижнего угла квадрата, то координатами точки (i, j) будут

$$x_i = x_0 + is, \quad y_j = y_0 + js.$$

Для введенной таким образом сетки дискретизация уравнения (39) имеет вид

$$\frac{\phi_{i+1,j} + \phi_{i-1,j} - 2\phi_{i,j}}{s^2} + \frac{\phi_{i,j+1} + \phi_{i,j-1} - 2\phi_{i,j}}{s^2} = f_{i,j}, \quad (40)$$

где $\phi_{i,j} = \phi(x_i, y_j)$, $f_{i,j} = f(x_i, y_j)$.

Точное решение сеточной задачи (40) удовлетворяет уравнению

$$\phi_{i,j} = \frac{1}{4}(\phi_{i+1,j} + \phi_{i-1,j} + \phi_{i,j+1} + \phi_{i,j-1} - s^2 f_{i,j}). \quad (41)$$

Это уравнение является основой для формирования различных итерационных алгоритмов. Если известно некоторое начальное приближение сеточной функции $\phi_{i,j}^0$, то уравнение (41) можно использовать для улучшения этого приближения. Это приводит к итерационному алгоритму Якоби

$$\phi_{i,j}^{n+1} = \frac{1}{4}(\phi_{i+1,j}^n + \phi_{i-1,j}^n + \phi_{i,j+1}^n + \phi_{i,j-1}^n - s^2 f_{i,j}), \quad (42)$$

где n обозначает номер итерации.

Данную итерационную процедуру можно ускорить почти в два раза, используя алгоритм Гаусса–Зейделя,

$$\phi_{i,j}^{n+1} = \frac{1}{4}(\phi_{i+1,j}^n + \phi_{i-1,j}^{n+1} + \phi_{i,j+1}^n + \phi_{i,j-1}^{n+1} - s^2 f_{i,j}). \quad (43)$$

Здесь предполагается, что значения сеточной функции в узлах обновляются с ростом i и j , поэтому для расчета новой $\phi_{i,j}$ используются уже обновленные $\phi_{i-1,j}$ и $\phi_{i,j-1}$. Чтобы избежать пространственную несимметрию, возникающую в простом алгоритме Гаусса–Зейделя (43), в численном счете используется метод Гаусса–Зейделя с „шахматным“ обновлением сеточной функции. Формально такой метод соответствует алгоритму Якоби (42) с двумя проходами, причем в первом проходе обновляются значения только в тех узлах, для которых $i + j$ четно („черные“ узлы), а во втором — для которых $i + j$ нечетно („белые“ узлы). Как нетрудно заметить, в этом случае в обновлении каждого „черного“ узла участвуют только четыре соседних „белых“ узла, которые были найдены в предыдущей итерации, и наоборот.

Для ускорения сходимости перечисленных выше итерационных алгоритмов можно использовать так называемую последовательную сверхрелаксацию (в англоязычной литературе — Successive Overrelaxation). Она заключается в том, что новое значение сеточной функции в узле (i, j) определяется линейной комбинацией старого и улучшенного значений функции в данном узле

$$\phi_{i,j}^{n+1} = (1 - w)\phi_{i,j}^n + \frac{w}{4}(\phi_{i+1,j}^n + \phi_{i-1,j}^n + \phi_{i,j+1}^n + \phi_{i,j-1}^n - s^2 f_{i,j}), \quad (44)$$

где w — параметр сверхрелаксации.

Следует отметить, что формулы (42)–(44) дают значения сеточной функции только во внутренних узлах сетки, т.е. при $1 \leq i, j \leq N - 1$. Значения сеточной функции в граничных узлах на каждой итерации определяются из граничных условий.

Стандартное условие остановки счета в итерационных алгоритмах состоит в равенстве нормы невязки наперед заданному значению ϵ

$$\|\phi_{i,j}^{n+1} - \phi_{i,j}^n\| \leq \epsilon. \quad (45)$$

Норму сеточной функции $\|A_{i,j}\|$ в этом выражении можно определить, например, как сумму квадратов значений $A_{i,j}$ во всех узлах сетки.

Аналогичную итерационную схему можно построить и для системы уравнений эллиптического типа (28)–(31). Для этого представим ее в виде

$$\tilde{\Delta} \mathbf{u} = \mathbf{f}(\mathbf{u}, x), \tag{46}$$

где неизвестная вектор-функция

$$\mathbf{u}(x, z) = \begin{bmatrix} v(x, z) \\ h(x, z) \\ g(x, z) \\ \tilde{w}(x, z) \\ w(x, z) \end{bmatrix},$$

а правая часть

$$f(\mathbf{u}, x)$$

$$= \begin{bmatrix} -\text{На}h'_z - 2\text{Re}_m\{g, h\} - 2\text{Re}\{v, w\} \\ -\text{На}v'_z - 2\text{Re}_m(\{h, w\} - hw'_z/x + \{g, v\} + vg'_z/x) \\ -\text{На}w'_z - 2\text{Re}_m\{g, w\} \\ -\text{На}\tilde{\Delta}g'_z - 2\text{Re}_m(\{g, \tilde{\Delta}g\} + g'_z\tilde{\Delta}g/x + hh'_z/x) + \\ + 2\text{Re}(\{w, \tilde{w}\} + w'_z\tilde{w}/x + vw'_z/x) \\ \tilde{w} \end{bmatrix}.$$

Дискретизация уравнения (46) в квадратной области с равномерной сеткой дает

$$\mathbf{u}_{i,j}^{n+1} = (\hat{\mathbf{I}} - \hat{\mathbf{P}})\mathbf{u}_{i,j}^n + \frac{1}{8x+2} \hat{\mathbf{P}} \left(4x(\mathbf{u}_{i+1,j}^n + \mathbf{u}_{i-1,j}^n) + \mathbf{u}_{i,j+1}^n + \mathbf{u}_{i,j-1}^n - s^2 \mathbf{f}_{i,j}(\mathbf{u}^n) \right), \tag{47}$$

Здесь $\hat{\mathbf{I}} = \text{diag}\{1, \dots, 1\}$ — единичная матрица, $\hat{\mathbf{P}} = \text{diag}\{w_1, \dots, w_0\}$ — диагональная матрица, элементы которой являются параметрами сверхрелаксации (вообще говоря, они могут быть разными для разных уравнений одной системы).

Итерационные схемы, подобные (47), несложно написать для произвольной прямоугольной области, используя сетку с переменным шагом. Однако получающиеся выражения довольно громоздки, поэтому мы не приводим их здесь.

3. Результаты

В данной главе представлены результаты расчета стационарного течения для проектируемой установки по экспериментальному исследованию магнитоторотационной неустойчивости. Установка представляет собой тороидальную камеру прямоугольного сечения с внутренним радиусом $R_- = 5$ см, внешним радиусом $R_+ = 15$ см и высотой $2a = 10$ см, заполненную жидким натрием. Физические свойства натрия: плотность $\rho = 0.92$ г/см³, кинематическая вязкость $\nu = 7.1 \cdot 10^{-3}$ см²/с, коэффициент диффузии магнитного поля $\eta = c^2/4\pi\sigma = 810$ см²/с, число Прандтля $\text{Pr} = \nu/\eta = 8.8 \cdot 10^{-6}$ (взято из [2]).

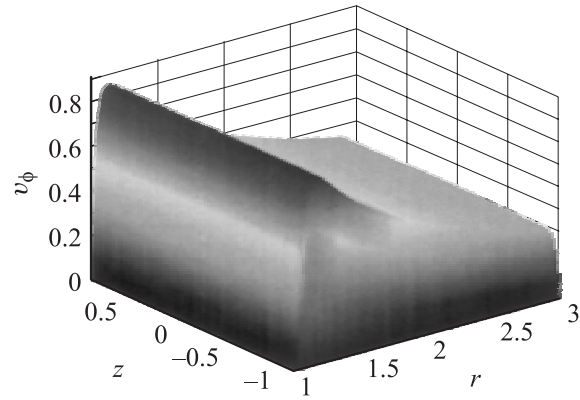


Рис. 3. Тороидальная скорость (в единицах V_0).

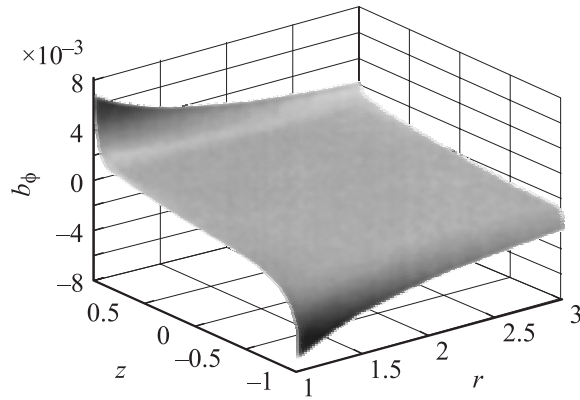


Рис. 4. Тороидальное магнитное поле (в единицах B_0).

Камера помещена во внешнее магнитное поле $B_0 = 0.3T$, через нее пропускается ток 1 кА. Данные параметры выбраны таким образом, чтобы удовлетворить критериям генерации МРН.

Решение системы (28)–(31) с граничными условиями (32)–(36) зависит от пяти параметров, а именно: аспектных соотношений $r_- = R_-/a$, $r_+ = R_+/a$, числа Гартмана На , магнитного и гидродинамического чисел Рейнольдса Re_m , Re . Для полного описания течения необходимы еще две величины (см. (37), (38)): характерная тороидальная скорость V_0 (27), которая однозначно связана с пропускаемым через канал током I_0 , и внешнее магнитное поле B_0 . Для рассматриваемой установки получаются следующие расчетные параметры: $r_- = 1$, $r_+ = 3$, $\text{На} = 1800$, $\text{Re} = 1.4 \cdot 10^6$, $\text{Re}_m = 12.3$.

Характерная тороидальная скорость при этом

$$V_0 = \frac{M_0}{a} = 2 \cdot 10^3 \frac{\text{cm}}{\text{s}}.$$

На рис. 3 и 4 показаны тороидальная скорость $v_\phi = v(r^2, z)/r$ и индуцированное тороидальное магнитное поле $b_\phi = \text{Re}_m h(r^2, z)/\text{На}$. Следует отметить, что гартмановские слои при $z = \pm 1$ в этом случае настолько тонкие, что на рис. 3 и 4 их невозможно разрешить.

Более детальный график на рис. 5 дает представление о поведении тороидальной скорости в гартмановском слое.

Одной из важнейших характеристик для магнито-ротационной неустойчивости является радиальная зависимость тороидальной скорости. На рис. 6 показан вид функции v_ϕ при $z = 0$ и для сравнения приведен график $1/r$. Видно, что практически во всем объеме канала радиальная зависимость тороидальной скорости имеет вид $\sim 1/r$.

Существенная особенность течения в кольцевом канале состоит в том, что течение обладает поперечными (полоидальными) компонентами скорости и индуцированного магнитного поля. На рис. 7 и 8 приведены структуры полойдальной скорости и индуцированного полойдального поля, которые полностью определяются функциями $w(r^2, z)$ и $g(r^2, z)$ соответственно. Интересно отметить, что полойдальная скорость образует четыре крупных ячейки, причем в нижней половине канала вращение жидкости в них происходит по часовой стрелке, а в верхней — против.

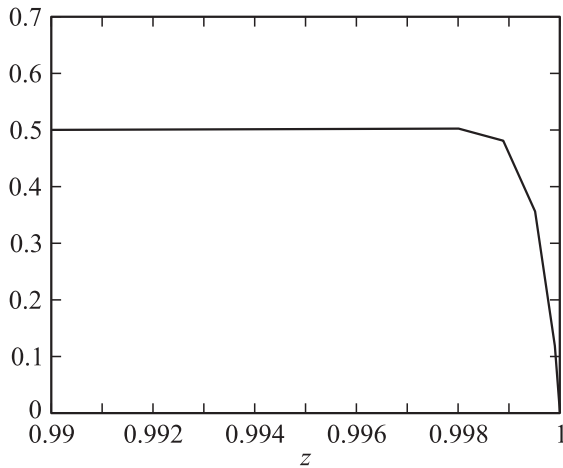


Рис. 5. Тороидальная скорость в сечении $r = 2$ (в единицах V_0).

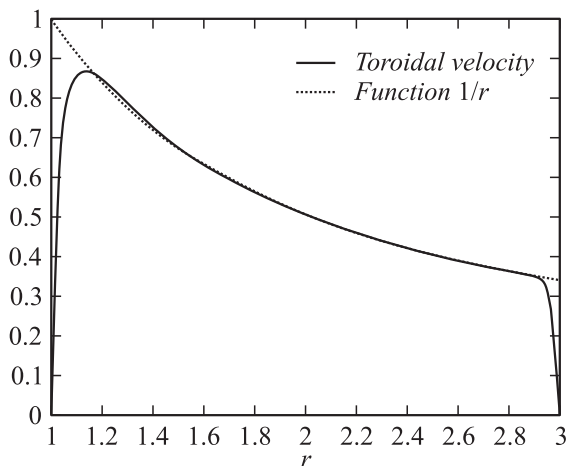


Рис. 6. Тороидальная скорость в сечении $z = 0$ (в единицах V_0).

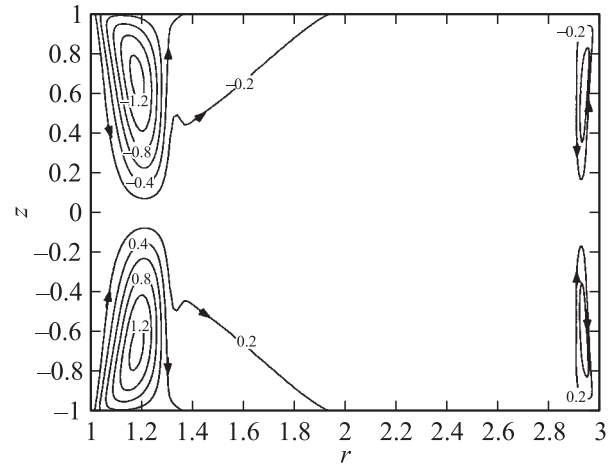


Рис. 7. Структура полойдальной скорости. Контуры соответствуют уровням функции $w(r^2, z) \times 10^4$. Стрелки указывают направления течений.

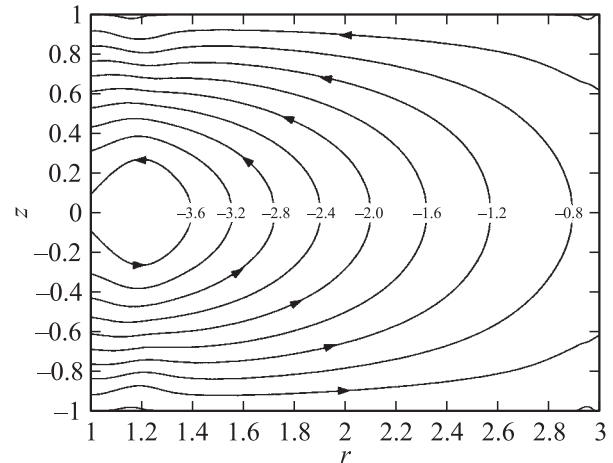


Рис. 8. Структура индуцированного полойдального магнитного поля. Контуры соответствуют уровням функции $g(r^2, z) \times 10^2$. Стрелки указывают направления силовых линий.

Заключение

В данной работе предложен новый численный метод расчета стационарных течений жидких металлов в кольцевых каналах прямоугольного сечения. Метод, являющийся обобщением итерационной схемы Гаусса–Зейделя, оказывается пригодным для расчетов, включающих большие значения чисел Гартмана Na и Рейнольдса Re . В частности, представлены результаты расчетов течения для кольцевого канала с $Na = 1800$ и $Re = 1.4 \cdot 10^6$.

Отметим, что быстродействие данного метода можно довести до $O(N^2)$, где N — число узлов сетки в каждом направлении, используя так называемые многосеточные схемы (подробнее см. в [17]). В этом случае описанный нами итерационный метод был бы быстрее

существующих прямых методов, быстродействие которых $O(N^2 \ln N)$. Однако на этом пути возникают определенные трудности, связанные с нелинейностью нашей задачи. По всей видимости, данный метод допускает обобщение также и на нестационарный случай.

Расчеты, выполненные для параметров проектируемой установки по исследованию МРН, показывают, что радиальная зависимость тороидальной скорости имеет вид $\sim 1/R$ практически во всем сечении канала. Такой профиль скорости удовлетворяет критериям генерации МРН.

Авторы выражают свою благодарность Е.П. Велихову за постановку данной задачи, а также В.И. Ильгисонису и В.П. Лахину за плодотворные обсуждения.

Список литературы

- [1] *Goodman Ji.H., Kageyama J.A.* // Mon. Not. Roy. Astron. Soc. 2001. Vol. 325. N2. P. L1–L5.
- [2] *Noguchi K., Pariev V.I., Golgate S.A.* et al. // Astrophys. J. 2002. Vol. 575. N2. P. 1151–1162.
- [3] *Велихов Е.П.* // ЖЭТФ. 1959. Т. 36. С. 1398–1404.
- [4] *Balbus S.A., Hawley J.F.* // Astrophys J. 1991. Vol. 376. N1. P. 214–222.
- [5] *Велихов Е.П.* Частное сообщение.
- [6] *Брагинский С.И.* // ЖЭТФ. 1959. Т. 37. С. 1417–1430.
- [7] *Hunt J.C.R.* // J Fluid Mech. 1965. Vol. 21. С. 577–590.
- [8] *Hunt J.C.R., Stewartson K.* // J. Fluid Mech. 1965. Vol. 23. P. 563–581.
- [9] *Fahidy T.Z.* // J. Fluid Mech. 1970. Vol. 42. P. 245–248.
- [10] *Baylis J.A., Hunt J.C.R.* // J. Fluid Mech. 1971. Vol. 48. P. 423–428.
- [11] *Verardi S.L.L., Cardoso J.R., Motta C.C.* // Trans. on Magn. 1998. Vol. 34. N5. P. 3134–3137.
- [12] *Hughes M., Pericleous K.A., Cross M.* // Appl. Math. Modeling. 1995. Vol. 19. N12. P. 713–723.
- [13] *Leboucher L.* // J. Comp. Phys. 1999. Vol. 150. N1. P. 181–198.
- [14] *Tezer-Sezgin M.* // Computers and Fluids. 2004. Vol. 33. N4. P. 533–547.
- [15] *Shercliff J.A.* A textbook on Magnetohydrodynamics. London, 1965. 265 p.
- [16] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Учебное пособие. Т. VI. Гидродинамика. М., 1986. 736 с.
- [17] *Press W.H., Flannery B.P., Teukolsky S.A.* et al. Numerical recipes in C: the Art of Scientific Computing. Cambridge, 1992. 994 p.