

01;09

## Возбуждение колебаний в полусферовом диэлектрическом резонаторе радиальным магнитным диполем

© Ю.В. Прокопенко, Ю.Ф. Филиппов, В.М. Яковенко

Институт радиофизики и электроники им. А.Я. Усикова НАН Украины,  
61085 Харьков, Украина  
e-mail: prokopen@ire.kharkov.ua

(Поступило в Редакцию 11 октября 2004 г.)

Исследовано возбуждение вынужденных колебаний радиальным магнитным диполем в полусфере, размещенном на идеально проводящей плоской поверхности. Показано, что такой диполь возбуждает колебания  $H$ -типа. При совпадении частот излучения диполя и собственного колебания резонатора в спектре возникает амплитудный резонанс. Эффективное возбуждение полусфера осуществляется при расположении магнитного диполя в максимуме радиальной компоненты поля соответствующего собственного колебания резонатора.

### Введение

Возбуждение колебаний в однородном диэлектрическом шаре впервые было исследовано Ми и Дебаем, рассмотревшим рассеяние электромагнитного поля на нем [1,2]. Внешнее и внутреннее возбуждения шара с конечной проводимостью электрическими и магнитными токами, распределенными в однородном изотропном пространстве, были рассмотрены в [3,4]. В настоящее время интерес к ним возник в связи с тем, что открытые диэлектрические резонаторы широко используются при неразрушающем измерении комплексной диэлектрической проницаемости веществ [5–7], для определения поверхностного импеданса металлов и тонких пленок высокотемпературных сверхпроводников [7–9], для фильтрации сигналов [10] и стабилизации частоты генераторов [11]. В таких резонаторах большое внимание уделяется собственным колебаниям типа шепчущей галереи, возникающих при больших значениях полярного индекса  $n$ . Слабое излучение их энергии из резонатора объясняется тем, что поле резонансного колебания испытывает почти полное внутреннее отражение от гладкой сферической поверхности. Это явление впервые было объяснено на звуковых колебаниях, возникающих в цилиндрической галерее [12]. Существенно расширенные функциональные возможности имеет полусферовой диэлектрический резонатор, расположенный на плоской проводящей поверхности. В частности, источники возбуждения резонатора могут быть размещены в плоском металлическом экране в виде щелей. В работе [13] на колебаниях шепчущей галереи экспериментально наблюдались электромагнитные пояски на сферической поверхности такого резонатора. Представляют интерес теоретические исследования распределений поля и энергий возбуждаемых колебаний в полусферовом резонаторе с плоской проводящей поверхностью.

### Теория

В работе рассмотрен диэлектрический полус шар с радиусом  $r_0$ . Полус шар расположен на идеально проводящей плоской неограниченной поверхности (рис. 1). Он изготовлен из изотропного и однородного вещества с комплексными значениями диэлектрической  $\epsilon_d$  и магнитной  $\mu_d$  проницаемостями и помещен в среду с комплексными проницаемостями  $\epsilon_a$  и  $\mu_a$ . В проводящей плоскости расположен магнитный диполь в виде щели, ориентированной вдоль радиуса, с плотностью тока

$$j_r^M(r, \theta, \varphi, t) = j_r^M(r, \theta, \varphi) \exp(-i\omega t),$$

где

$$j_r^M(r, \theta, \varphi) = \frac{J_0 \delta(r - r_1)}{r^2 \sin \theta} \delta(\theta - \pi/2) \delta(\varphi),$$

$J_0$  — полный магнитный ток,  $\omega$  — частота излучения диполя,  $\delta(x)$  — дельта-функция,  $r_1$  — местоположение источника по радиальной координате.

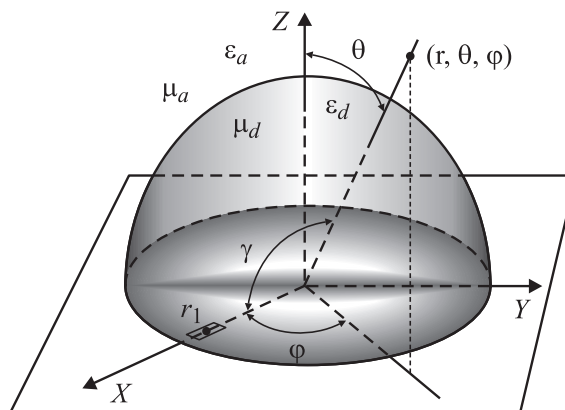


Рис. 1. Полусферовой диэлектрический резонатор с неограниченной проводящей плоскостью.

Система уравнений Максвелла для компонент поля имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} rE_\theta - \frac{\partial}{\partial \theta} E_r &= ikr\mu_\nu H_\varphi; \\ \frac{1}{\sin \theta} \left( \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta E_\varphi - \frac{\partial}{\partial \varphi} E_\theta \right) &= ikr\mu_\nu H_r + \frac{4\pi r}{c} j_r^M(r, \theta, \varphi, t); \\ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} E_r - \frac{\partial}{\partial r} rE_\varphi &= ikr\mu_\nu H_\theta; \\ \frac{1}{\sin \theta} \left( \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta H_\varphi - \frac{\partial}{\partial \varphi} H_\theta \right) &= ikr\varepsilon_\nu E_r; \\ \frac{\partial}{\partial r} rH_\theta - \frac{\partial}{\partial \theta} H_r &= -ikr\varepsilon_\nu E_\varphi; \\ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} H_r - \frac{\partial}{\partial r} rH_\varphi &= -ikr\varepsilon_\nu E_\theta. \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\nu = d$  при  $r \leq r_0$  и  $\nu = a$  при  $r > r_0$ ;  $k = \omega/c$ , где  $c$  — скорость света; все компоненты поля содержат временной множитель  $\exp(-i\omega t)$ , который в дальнейших соотношениях не приводится.

После исключения из (1) компонент  $E_\theta$ ,  $E_\varphi$ ,  $H_\theta$  и  $H_\varphi$  система уравнений Максвелла приводится к решению дифференциальных уравнений относительно радиальных компонент  $H_r$  и  $E_r$

$$\begin{aligned} \left[ \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \chi_\nu^2 \right) r^2 + \Delta_\perp \right] H_r(r, \theta, \varphi) &= \frac{4\pi i}{\omega\mu_\nu} \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \chi_\nu^2 \right) r^2 j_r^M(r, \theta, \varphi); \\ \left[ \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \chi_\nu^2 \right) r^2 + \Delta_\perp \right] E_r(r, \theta, \varphi) &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь оператор

$$\Delta_\perp = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \quad \text{и} \quad \chi_\nu = k\sqrt{\varepsilon_\nu\mu_\nu}.$$

В изотропном диэлектрическом полусфере существуют  $H$ - ( $E_r = 0$ ) и  $E$ -колебания ( $H_r = 0$ ) [14]. Из (2) следует, что магнитный ток  $j_r^M(r, \theta, \varphi)$  возбуждает только колебания  $H$ -типа.

Введя функцию  $U(r, \theta, \varphi)$  функциональным соотношением для радиальной магнитной компоненты поля

$$H_r(r, \theta, \varphi) = \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \chi_\nu^2 \right) U(r, \theta, \varphi), \quad (3)$$

уравнение (2), определяющее  $H$ -колебания, принимает вид

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \chi_\nu^2 + \frac{\Delta_\perp}{r^2} \right) U(r, \theta, \varphi) = \frac{4\pi i}{\omega\mu_\nu} j_r^M(r, \theta, \varphi). \quad (4)$$

Тангенциальные компоненты полей  $H$ -колебаний выражаются через функцию  $U(r, \theta, \varphi)$  следующим образом:

$$\begin{aligned} rH_\theta(r, \theta, \varphi) &= \frac{\partial^2 U(r, \theta, \varphi)}{\partial \theta \partial r}; \\ rH_\varphi(r, \theta, \varphi) &= \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial^2 U(r, \theta, \varphi)}{\partial \varphi \partial r}; \\ rE_\theta(r, \theta, \varphi) &= \frac{ik\mu_\nu}{\sin \theta} \frac{\partial U(r, \theta, \varphi)}{\partial \varphi}; \\ rE_\varphi(r, \theta, \varphi) &= -ik\mu_\nu \frac{\partial U(r, \theta, \varphi)}{\partial \theta}. \end{aligned} \quad (5)$$

Решение уравнения (4) находится в виде разложения

$$U(r, \theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n R_{nm}(\chi_\nu r) Y_{nm}(\theta, \varphi). \quad (6)$$

Функции  $Y_{nm}(\theta, \varphi) = P_n^m(\cos \theta) \exp(im\varphi)$  являются собственными функциями оператора  $\Delta_\perp$ , в которых  $P_n^m(\cos \theta)$  — присоединенные функции Лежандра, отличные от нуля при  $m \leq n$ . Функции  $R_{nm}(\chi_\nu r)$  удовлетворяют неоднородному дифференциальному уравнению

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \chi_\nu^2 - \frac{n(n+1)}{r^2} \right) R_{nm}(\chi_\nu r) &= \frac{4\pi i}{\omega\mu_\nu} \frac{P_n^m(0)}{q_{nm}} \frac{J_0 \delta(r-r_1)}{r^2}, \end{aligned} \quad (7)$$

где  $q_{nm} = \pi(n+m)!/(2n+1)(n-m)!$ .

Уравнение (7) получается после подстановки разложения (6) в уравнение (4), умножения полученного результата на  $Y_{n'm'}(\theta, \varphi)$  и последующего интегрирования по углам  $\varphi$  от 0 до  $2\pi$  и  $\theta$  от 0 до  $\pi/2$ . При этом учитывается условие ортогональности [15]

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} Y_{nm}(\theta, \varphi) Y_{n'm'}(\theta, \varphi) \sin \theta d\theta = q_{nm} \delta_{nn'} \delta_{mm'},$$

где  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера.

Для функций  $P_n^m(\cos \theta)$  и  $(d/d\theta)P_n^m(\cos \theta)$  на проводящей поверхности ( $\theta = \pi/2$ ) справедливы соотношения [15]

$$\begin{aligned} P_n^m(0) &= \frac{2^m}{\sqrt{\pi}} \cos\left(\frac{\pi}{2}(n+m)\right) \frac{\Gamma((n+m+1)/2)}{\Gamma((n-m+2)/2)}, \\ \frac{d}{d\theta} P_n^m(\cos \theta) \Big|_{\theta=\pi/2} &= \frac{2^{m+1}}{\sqrt{\pi}} \sin\left[\frac{\pi}{2}(n+m)\right] \frac{\Gamma((2+n+m)/2)}{\Gamma((1+n-m)/2)}, \end{aligned} \quad (8)$$

где  $\Gamma(x)$  — гамма-функция.

На проводящей поверхности резонатора  $E_\varphi$  компонент поля обращается в нуль. Из (5), учитывая (8), следует, что данное граничное условие выполняется,

если сумма индексов  $n + m$  принимает четные значения. Следовательно, в резонаторе азимутально-однородные  $H$ -колебания ( $m = 0$ ) с нечетным полярным индексом  $n$  не возбуждаются.

Функция

$$R_{nm}(\chi_v r) = \frac{P_n^m(0)}{q_{nm}} R_n(\chi_v r),$$

представляющая собой решение дифференциального уравнения (7), является конечной в центре полшара и удовлетворяет условию излучения волны на бесконечности. Функция  $R_n(\chi_v r)$  зависит от местоположения источника возбуждения  $r_1$  и определяется следующим образом:

$$r_1 \leq r_0$$

$$R_n(\chi_v r) = \begin{cases} T_n(\chi_d r) + A_n^{(1)} j_n(\chi_d r), & r \leq r_0, \\ B_n^{(1)} h_n^{(1)}(\chi_a r), & r > r_0, \end{cases}$$

$$r_1 > r_0$$

$$R_n(\chi_v r) = \begin{cases} A_n^{(2)} j_n(\chi_d r), & r \leq r_0, \\ T_n(\chi_a r) + B_n^{(2)} h_n^{(1)}(\chi_d r), & r > r_0. \end{cases}$$

Здесь  $j_n(z) = \sqrt{\pi z/2} J_{n+1/2}(z)$  и  $h_n^{(1)}(z) = \sqrt{\pi z/2} \times \times H_{n+1/2}^{(1)}(z)$ , где  $J_{n+1/2}(z)$  и  $H_{n+1/2}^{(1)}(z)$  — цилиндрические функции Бесселя и Ханкеля первого рода соответственно. Функция

$$T_n(\chi_v r) = \begin{cases} \frac{4\pi}{c} \frac{J_0}{\mu_v \sqrt{\varepsilon_v \mu_v k^2 r_1^2}} h_n^{(1)}(\chi_v r_1) j_n(\chi_v r), & r \leq r_1, \\ \frac{4\pi}{c} \frac{J_0}{\mu_v \sqrt{\varepsilon_v \mu_v k^2 r_1^2}} j_n(\chi_v r_1) h_n^{(1)}(\chi_v r), & r \geq r_1 \end{cases}$$

отображает влияние источника возбуждения на формирование поля внутри и вне резонатора. Амплитуды полей возбуждаемых вынужденных колебаний на частоте магнитного диполя  $A_n^{(1)}$ ,  $A_n^{(2)}$ ,  $B_n^{(1)}$  и  $B_n^{(2)}$  определяются из граничных условий непрерывности тангенциальных компонент поля на поверхности полшара  $r = r_0$  и имеют вид

$$A_n^{(1)} = \left[ \sqrt{\varepsilon_a \mu_d} T_n(\chi_d r_0) h_n^{(1)'}(\chi_a r_0) - \sqrt{\varepsilon_d \mu_a} T_n'(\chi_d r_0) h_n^{(1)}(\chi_a r_0) \right] / \Delta_n(\omega),$$

$$A_n^{(2)} = \mu_a \sqrt{\varepsilon_a} \left[ T_n'(\chi_a r_0) h_n^{(1)}(\chi_a r_0) - T_n(\chi_a r_0) h_n^{(1)'}(\chi_a r_0) \right] / \sqrt{\mu_d} \Delta_n(\omega),$$

$$B_n^{(1)} = \mu_d \sqrt{\varepsilon_d} \left[ T_n(\chi_d r_0) j_n'(\chi_d r_0) - T_n'(\chi_d r_0) j_n(\chi_d r_0) \right] / \sqrt{\mu_a} \Delta_n(\omega),$$

$$B_n^{(2)} = \left[ \sqrt{\varepsilon_a \mu_d} T_n'(\chi_a r_0) j_n(\chi_d r_0) - \sqrt{\varepsilon_d \mu_a} T_n(\chi_a r_0) j_n'(\chi_d r_0) \right] / \Delta_n(\omega).$$

Выражения для амплитуд (9) содержат знаменатель

$$\Delta_n(\omega) = \sqrt{\varepsilon_d \mu_a} j_n'(\chi_d r_0) h_n^{(1)}(\chi_a r_0) - \sqrt{\varepsilon_a \mu_d} j_n(\chi_d r_0) h_n^{(1)'}(\chi_a r_0).$$

Штрих у цилиндрических функций означает дифференцирование по аргументу. Решения уравнения

$$\Delta_n(\omega_p) = 0 \quad (10)$$

определяют собственные частоты  $\omega_p$  рассматриваемого резонатора [16]. Наличие потерь на излучение и потери в диэлектрике приводят к тому, что частота собственных колебаний резонатора комплексна  $\omega_p = \omega_p' - i\omega_p''$  ( $\omega_p'' \geq 0$ ). Мнимая часть собственной частоты  $\omega_p$  резонатора определяет декремент затухания поля данной моды с индексом  $p$ . Каждая  $p$ -я мода колебаний в общем случае характеризуется тремя индексами  $n$ ,  $m$  и  $s$ . Полярный индекс  $n$  определяет число вариаций поля по полярной координате  $\theta$  для азимутально-однородных колебаний ( $m = 0$ ). Азимутальный индекс  $m$  в свою очередь характеризует число вариаций поля для азимутальных колебаний по  $\varphi$ . Радиальный индекс  $s$ , который соответствует порядковому номеру корня дисперсионного уравнения (10), определяет число вариаций поля по радиальной координате  $r$ .

Частота же вынужденных колебаний  $\omega$  является действительной. При совпадении частоты  $\omega$  вынужденного колебания и действительной части частоты  $\omega_p'$  одного из собственных колебаний возникает амплитудный резонанс. В результате в вынужденном и собственном  $H$ -колебаниях исследуемого резонатора совпадают частоты и полярные индексы.

В исследуемом резонаторе компоненты полей вынужденных  $H$ -колебаний, определяемые соотношениями (3) и (5) с учетом решения (6) после применения теоремы сложения [15] для рассматриваемого случая возбуждения

$$P_n(\cos \gamma) = \sum_{m=-n}^n \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(\cos \theta) P_n^m(0) \exp(im\varphi),$$

имеют вид

$$E_r = 0; \quad H_r = \frac{1}{\pi r^2} \sum_{n=0}^{\infty} n(n+1)(2n+1) R_n(\chi_v r) P_n(\cos \gamma),$$

$$H_\theta = \frac{\cos \theta \cos \varphi}{\pi r} \chi_v \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) R_n'(\chi_v r) P_n'(\cos \gamma),$$

$$E_\theta = -ik\mu_v \frac{\sin \varphi}{\pi r} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) R_n(\chi_v r) P_n'(\cos \gamma),$$

$$H_\varphi = -\frac{\sin \varphi}{\pi r} \chi_v \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) R_n'(\chi_v r) P_n'(\cos \gamma),$$

$$E_\varphi = -ik\mu_v \frac{\cos\theta \cos\varphi}{\pi r} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)R_n(\chi_v r)P'_n(\cos\gamma),$$

где  $P_n(\cos\gamma)$  — полином Лежандра,  $\cos\gamma = \sin\theta \cos\varphi$ ;  $\gamma$  — угол между источником и точкой наблюдения (рис. 1).

Таким образом, в полусферическом изотропном диэлектрическом резонаторе с проводящей плоской поверхностью в каждой моде наблюдается  $n+1$ -кратное частотное вырождение по азимутальному индексу  $m$ . Снятие вырождения вынужденных колебаний в резонаторе при возбуждении радиальным магнитным диполем не наблюдается.

Плотность энергии возбуждаемых  $H$ -колебаний в любой точке наблюдения определяется соотношением [17]

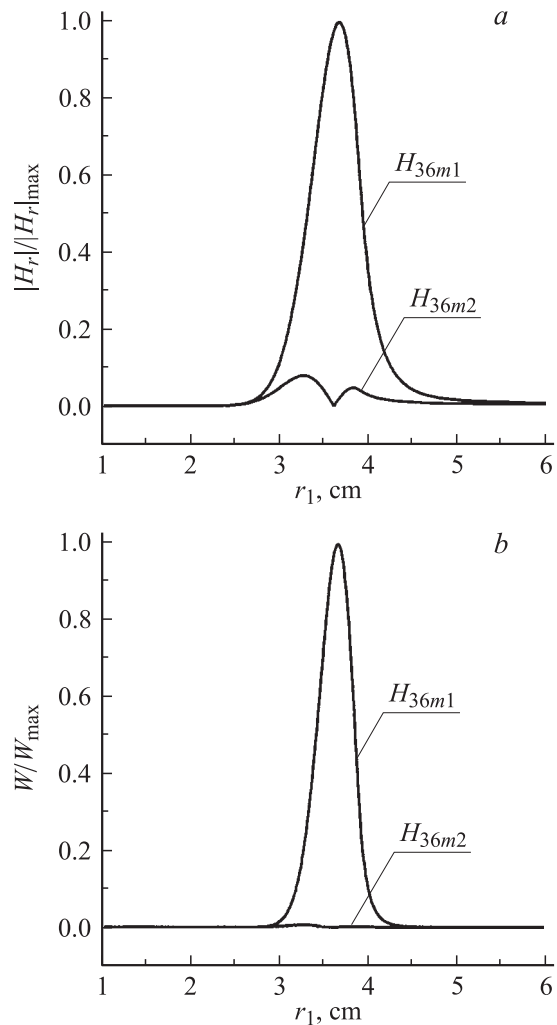
$$W = (\epsilon_v \mathbf{E}\mathbf{E}^* + \mu_v \mathbf{H}\mathbf{H}^* + \text{k.c.})/16\pi,$$

где звездочка указывает на комплексно-сопряженную величину.

## Численный эксперимент

Численные исследования были проведены для полусферического резонатора из фторопласта ( $\epsilon_d = 2.04 \times (1 + 1.7 \cdot 10^{-4}i)$ ,  $\mu_d = 1$ ) с радиусом  $r_0 = 3.9$  см, расположенного на идеально проводящей плоскости. Резонатор помещен в среду с  $\epsilon_a = \mu_a = 1$ . Рассмотрено возбуждение  $H_{36ms}$  колебаний резонатора. Изменение расположения магнитного диполя вдоль радиальной координаты влияло на эффективность возбуждения резонатора (рис. 2). Наиболее эффективное возбуждение наблюдалось при совпадении точки возбуждения с положением максимума распределения энергии собственного колебания резонатора. В экспериментальных исследованиях такого резонатора на эффективность его возбуждения будет влиять связь между источником и полусфером. Величина коэффициента связи в численных исследованиях пропорциональна радиальному расстоянию между возбуждающим источником и максимумом распределения соответствующего колебания шепчущей галереи.

Распределения плотности энергии и радиальной компоненты поля возбуждаемого  $H_{36m1}$  колебания на поверхности полусфера и проводящей плоскости вне области диэлектрика приведены на рис. 3 и 4 соответственно. Частота этого колебания равна 35.445 GHz. Исследуемый резонатор с соответствующим собственным колебанием имеет добротность 5013.7. Точечный источник возбуждения располагался в точках с угловыми координатами  $\theta = \pi/2$ ,  $\varphi = 0$  и радиальной координатой  $r_1 = 3.7$  см, соответствующей максимуму распределения энергии собственного колебания резонатора, или  $r_1 = 3.9$  см, т.е. на поверхности полусфера. При  $r_1 = r_0$  наблюдается сосредоточение энергии возбуждаемого колебания в виде пояска вблизи проводящей поверхности

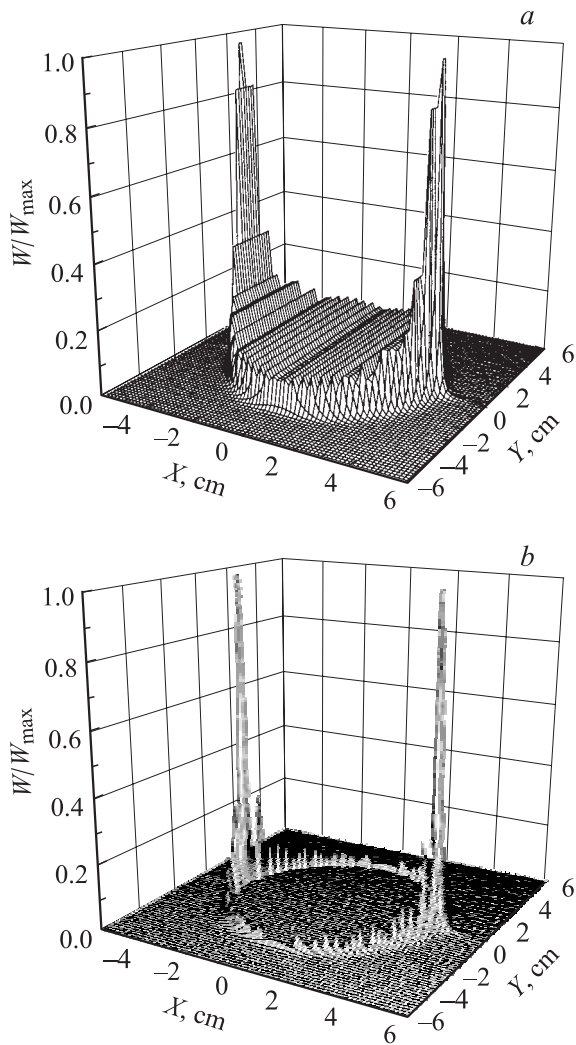


**Рис. 2.** Нормированные величины  $|H_r|$  компоненты поля (а) и плотности энергии (б)  $H_{36ms}$  колебаний в точке с координатами  $r = 3.9$  см и  $\theta = \varphi = \pi/4$  в зависимости от месторасположения источника возбуждения.

и параллельного ей (рис. 3, б). Такое распределение поля характерно азимутальному колебанию с индексом  $m = n$ .

Максимальные плотности энергии возбуждаемого колебания (рис. 3) расположены в точках максимального распределения энергии собственного колебания резонатора и в одной радиальной плоскости с источником возбуждения. В распределениях плотностей энергий возбуждаемого колебания (рис. 3) просматривается выделение пояска электромагнитного поля (особенно на проводящей поверхности), проходящего через точку возбуждения и полюс полусфера. Такое распределение характерно для азимутально-однородного колебания с индексом  $m = 0$ . Расположение источника возбуждения в какой-то мере позволяет выделить колебание с конкретным азимутальным индексом  $m$ .

Аналогичный характер распределения полей наблюдается и для колебания  $H_{36m2}$ . Отличие в том, что эффективность возбуждения этого колебания намного

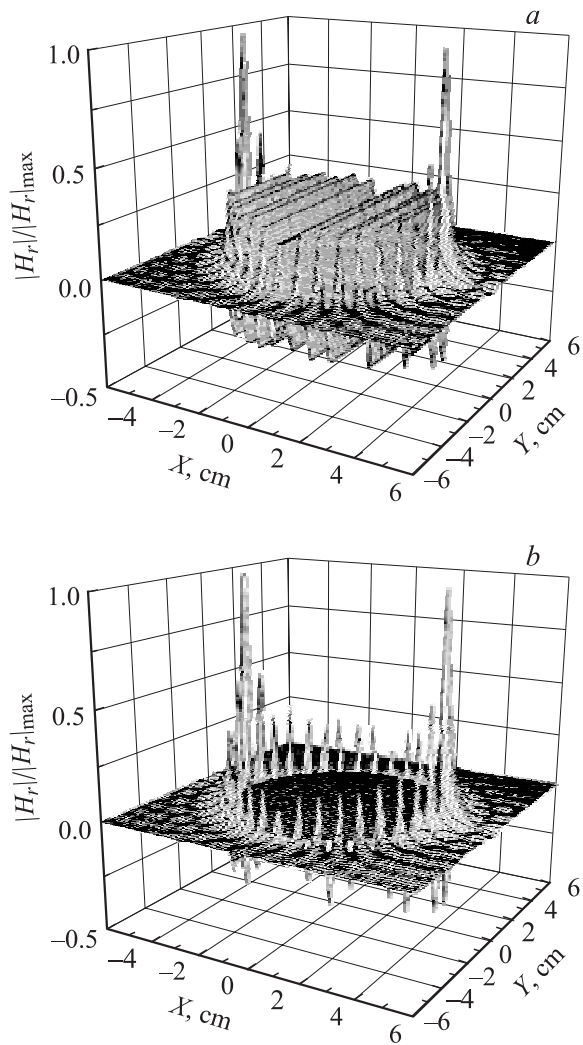


**Рис. 3.** Распределение плотности энергии  $H_{36m1}$  колебания при расположении источника возбуждения в точках с  $r_1 = 3.7$  (a) и  $3.9$  cm (b).

меньше (рис. 2), несмотря на более высокую частоту (39.743 GHz). При этом собственная добротность резонатора равна 498.65.

### Заключение

Исследованы вынужденные колебания в изотропном диэлектрическом полусфере, размещенном на идеально проводящей плоской поверхности. Показано, что радиальный магнитный диполь возбуждает только колебания  $H$ -типа. Из граничного условия на проводящей поверхности следует, что в резонаторе для  $H$ -колебаний сумма полярного и азимутального индексов  $n + m$  имеет четные значения. В результате вынужденным, как и собственным,  $H$ -колебаниям присуще  $n + 1$ -кратное частотное вырождение по азимутальному индексу  $m$ . В таком резонаторе азимутально-однородные  $H$ -колебания



**Рис. 4.** Распределение  $H_r$  компоненты поля  $H_{36m1}$  колебания при расположении источника возбуждения в точках с  $r_1 = 3.7$  (a) и  $3.9$  cm (b).

( $m = 0$ ) с нечетным полярным индексом  $n$  не возбуждаются.

При приближении частоты излучения диполя к частоте собственного колебания резонатора возникает амплитудный резонанс. Показано, что на колебаниях типа шепчущей галереи радиальный магнитный диполь формирует в полусфере энергетические пояски, экспериментально обнаруженные в работе [13].

Работа выполнена при частичной поддержке НТЦУ (проект № 2051).

### Список литературы

- [1] *Mie G.* // Annalen der Physik. 1908. N 25. P. 77–445.
- [2] *Debye P.* // Annalen der Physik. 1909. N 30. P. 17–30.
- [3] *Марков Г.Т.* // ЖТФ. 1953. Т. 23. Вып. 5. С. 838–848.
- [4] *Марков Г.Т., Чаплин А.Ф.* Возбуждение электромагнитных волн. М.: Радио и связь, 1983. 296 с.

- [5] *Derkach V.N., Filippov Yu.F., Plevako A.S.* et al. // Int. J. Infrared and Millimeter Waves. 2004. Vol. 25. N 1. P. 139–148.
- [6] *Прокопенко Ю.В., Смирнова Т.А., Филиппов Ю.Ф.* и др. // Вопросы атомной науки и техники. 2004. № 4. С. 87–90.
- [7] *Прокопенко Ю.В., Филиппов Ю.Ф.* // ЖТФ. 2002. Т. 72. Вып. 6. С. 79–84.
- [8] *Баранник А.А., Прокопенко Ю.Ф., Филиппов Ю.Ф.* и др. // ЖТФ. 2003. Т. 73. Вып. 5. С. 99–103.
- [9] *Cherpak N.T., Barannik A.A., Prokopenko Yu.V.* et al. // IEEE Trans. Appl. Superconductivity. 2003. Vol. 33. N 2. P. 3570–3573.
- [10] *Borskina S.V., Nosich A.I.* // Радиофизика и радиоастрономия. 1997. Т. 2. № 3. С. 333–341.
- [11] *Kharkovsky S., Kirichenko A., Kogut A.* // Microwave and Optical Technology Letters. 1996. Vol. 12. N 4. P. 210–213.
- [12] *Lord Rayleigh* // Phil. Mag. 1910. Vol. 20. P. 1001–1004.
- [13] *Харьковский С.Н., Козут А.Е., Солодовник В.А.* // Письма в ЖТФ. 1995. Т. 21. вып. 18. С. 38–42.
- [14] *Sullivan K.G., Hall D.G.* // Phys. Rev. 1994. Vol. 50. N 3. P. 2701–2716.
- [15] *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. М.: Наука, 1996. Т. 2. 296 с.
- [16] *Прокопенко Ю.В., Смирнова Т.А., Филиппов Ю.Ф.* // ЖТФ. 2004. Т. 74. Вып. 4. С. 82–88.
- [17] Основные формулы физики / Под ред. Д. Мензела. М.: ИЛ, 1957. 658 с.