01

Об интерпретации измерений скорости как косвенных в задаче определения траектории

© А.С. Девятисильный

Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН,
690041 Владивосток, Россия
e-mail: devyatis@iacp.dvo.ru

(Поступило в Редакцию 17 декабря 2002 г. В окончательной редакции 5 марта 2003 г.)

Показано, что необходимым условием корректной постановки обратной траекторной задачи при измерениях вектора линейной скорости материальной точки в гравитационном поле является невырожденность матрицы — гессиана функции потенциала поля.

Известно, какое значение имеет знание вектора скорости для определения траектории.

Пусть в некоторой инерциальной системе отсчета $0\xi = 0\xi_1\xi_2\xi_3$ с началом в точке 0 и ортогональными осями выполнимы прямые измерения (с соблюдением базовых физических принципов [1]) вектора абсолютной линейной скорости (V) материальной точки единичной массы. Тогда прямым интегрированием уравнения (дифференциальной связи)

$$V = \dot{R} \tag{1}$$

при известном начальном положении точки $R(t_0) = R_0$ можно найти радиус-вектор (R) положения точки в 0ξ в любой момент времени $t \geq t_0$. Вместе с тем, очевидно, что в силу неизбежности возмущений (погрешностей в определении начального вектора R_0, измерений времени и скорости) энтропия такого решения будет расти во времени.

Рассмотрим задачу определения вектора R в другой постановке. Будем интерпретировать измерения V как косвенные, содержащие информацию о R. По сути это означает переход к обратной в сравнении с (1) задаче, но с той же целью — определение R. Такой аспект постановки задачи требует формулировки дополнительных условий на V, не противоречащих проверенным физическим представлениям о природе механического движения.

Если оставаться в рамках классической механики [2], то, вообще говоря, эти условия известны и в форме дифференциальной причинно-следственной связи определены вторым законом Ньютона

$$\dot{V} = a, \tag{2}$$

где a — удельная сила, действующая на точку; примем, что a является непрерывной по R вектор-функцией, т. е. $a = a(R)$.

Запишем (1) и (2) совместно „в малом“. Имеем

$$\delta V = \delta\dot{R}, \quad \delta\dot{V} = a'\delta R, \tag{3}$$

где $a' = \partial a/\partial R$.

Замечательным в (3) является то, что она полностью отвечает конструкции, рассматриваемой в рамках общесистемных представлений о проблеме разрешимости обратных задач как о проблеме наблюдаемости [3]. Действительно, в системе уравнений (3) матрица $\begin{pmatrix} E & O \\ O & a' \end{pmatrix}$ при векторе $(\delta\dot{R}^T, \delta R^T)^T$, где E — единичная матрица, T — символ транспонирования векторов, в соответствии с указанными представлениями является матрицей наблюдаемости, откуда и следует, что для корректной постановки обсуждаемой задачи требуется, чтобы матрица a' была неособой почти всюду в области решения.

Физические реалии таковы, что сила $a(R)$ представима в виде

$$a(R) = \partial U/\partial R + f,$$

где U — потенциал гравитационного поля — непрерывная по R функция; f — вектор удельных сил негравитационной природы (здесь и далее положим $f = 0$ не без учета того, что вектор f в ряде практических случаев может быть измерен непосредственно, например пространственным ньютонометром [2], и, таким образом, учтен при решении задачи).

С учетом изложенного матрица a' отождествима с гессианом функции гравитационного потенциала (т. е. $a' = U''$), который при непрерывной по R вещественной функции $U(R)$ является вещественной симметричной матрицей.

Пусть поле центрально, т. е. $U = \mu/|R|$, где μ — гравитационный параметр центра. Такая модель, например, достаточно широко применяется при описании внешнего гравитационного поля Земли (в силу того, что в разложении земного потенциала центральная компонента является существенно преобладающей). Тогда матрица

$$U'' = -\frac{\mu}{|R|^3}\left(E - \frac{3RR^T}{|R|^2}\right)$$

имеет полный ранг (с отношением сингулярных чисел $2:1:1$) и рассматриваемая задача потенциально разрешима.

Перейдем к относительным измерениям. Пусть во вращающейся с известной угловой скоростью $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)^T$ декартовой системе отсчета $ox = ox_1x_2x_3$ в проекциях на ее оси измеряется вектор относительной линейной скорости точки $v = \dot{r}$, где r — радиус-вектор положения материальной точки в проекциях на оси трехгранника ox. Тогда вместо системы (3) „в малом“ образуется система

$$\delta v = \delta \dot{r},$$

$$\delta \dot{v} = 2q\delta\dot{r} + (\dot{q} + q^2 + U'')\delta r, \tag{4}$$

где

$$U'' = \partial^2 U/\partial r^2; \qquad q = \begin{pmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Как видно из (4), в этом случае для корректной постановки задачи требуется, чтобы неособой почти всюду на области решения была матрица $\dot{q} + q^2 + U''$.

Сохраняя далее гипотезу о центральности гравитационного поля и по-прежнему полагая $f = 0$, рассмотрим такой частный случай вращения трехгранника ox, когда $\omega = \mathrm{const}$, $\omega_1 = 0$, а орты оси ox_3 и радиус-вектора r совпадают. Тогда $\dot{q} = 0$, сингулярные числа гессиана U'' относятся как $2:1:1$, а матрица $q^2 + U''$, вообще говоря, неособая, если только не выполняются следующие соотношения: $|\omega| = \nu$, $|\omega|^2 = \nu^2 + 3\omega_2^2/2$, $\nu = (\mu/|r|^3)^{1/2}$.

Обобщая оба случая — абсолютного и относительного измерений скорости, заключаем, что определяющим (и, особенно важно отметить, физическим) условием корректности постановки рассматриваемой задачи, в некотором смысле стабилизирующем ее решение, является движение точки под действием потенциальных сил с невырожденным гессианом потенциала. И наконец, представляется уместным для примера отметить, что именно наличием такого естественного условия можно объяснить осуществимость асимптотически устойчивой коррекции динамической компоненты работы инерциальной навигационной системы под допплеровским измерениям скорости [4].

Список литературы

[1] *Иоффе А.Ф.* Основные представления современной физики. Л.: ГИТТЛ, 1949. 365 с.

[2] *Ишлинский А.Ю.* Классическая механика и силы инерции. М.: Наука, 1987. 320 с.

[3] *Калман Р., Фалб П., Арбиб М.* Очерки по математической теории систем. М.: Мир, 1971. 400 с.

[4] *Андреев В.Д.* Теория инерциальной навигации (корректируемые системы). М.: Наука, 1967. 648 с.