

# Исследование метода нестационарных волноводных уравнений для расчета импульсных процессов в нерегулярных линиях передачи

© В.Н. Михайлов, В.И. Короза, М.Н. Голиков

Институт стратегической стабильности,  
115304 Москва, Россия  
e-mail: iss@niit.ru

(Поступило в Редакцию 2 июля 2002 г.)

Исследуются возможности модели нестационарных волноводных уравнений для импульсных процессов в нерегулярных линиях передачи на примере линий планарного типа. Обсуждается постановка задачи численного расчета с высокой точностью и контролем погрешности. Приводятся и обсуждаются характерные примеры расчета сверхширокополосных электромагнитных импульсов с первоначальной поперечно-электромагнитной структурой в нерегулярных линиях во временном представлении и особенности их поведения при взаимодействии с неоднородностями, в том числе трансформация их в продольные волны. Рассматриваются как распределенные, так и сосредоточенные неоднородности: 2 варианта глубоких гофров, перекрывающих первоначальную апертуру линии на 90%, как примеры распределенных неоднородностей, а также в сочетании с ними изломы граничных поверхностей и скачки диэлектрической проницаемости на границах диэлектрического включения — сосредоточенные неоднородности. Показано, что относительная среднеквадратичная погрешность расчета напряженности поля не хуже  $\sim 10^{-4}$  легко достижима.

## Введение

В связи с возрастающим интересом к исследованиям по электродинамике неустановившихся и импульсных процессов в нерегулярных линиях передачи и, в частности, к вопросам распространения в них UWB (сверхширокополосных) ЕМР (электромагнитных импульсов) [1] перед волноводной электродинамикой возникают новые задачи. Разработанные для численного исследования монохроматических (т.е.  $\sim \exp(-i\omega t)$ ) процессов модели практически неприменимы при исследовании по UWB ЕМР по следующей причине. Численное обращение интегралов Фурье от получаемых для нерегулярных волноводов также численно монохроматических составляющих поля UWB ЕМР сопряжено с непреодолимыми трудностями в достижении удовлетворительной точности расчетов и осуществлении ее контроля из-за весьма значительной ширины частотных спектров. Это приводит к необходимости отказа от применения частотных представлений и развития новых более общих методов расчета, обладающих высокой точностью и возможностью контроля погрешности.

В то же время при распространении импульсов наносекундного и субнаносекундного диапазонов в устройствах, содержащих нерегулярные отрезки линий, возникают явления, не только количественно, но и качественно не укладывающиеся в традиционные представления теории линий передач из-за ее приближенного характера и неполной адекватности строгому электродинамическому подходу. В частности, в согласованной неоднородной линии (т.е. при неизменном вдоль ее длины волновом сопротивлении) импульс структуры TEM (поперечной электромагнитной) при обычных малых потерях на единицу длины линии в соответствии с общепринятой одномодовой моделью может лишь

медленно изменять свою форму, при этом в отсутствие потерь форма импульса должна сохраняться. Однако и эксперимент [2], и выполненный на основе более строгой модели „связанных струн“ [3] расчет [4] показывают возможность значительных качественных отклонений от этих представлений. Различие результатов объясняется тем, что методы расчета на основе одномодовой модели телеграфных уравнений не учитывают механизм взаимной трансформации мод и, в частности, трансформации недисперсной волны TEM в дисперсные моды (и обратно) при непрерывном изменении параметров поперечного сечения. В то же время применяемый ниже вариационный метод [3], более адекватный строгому электродинамическому подходу, учитывает эти реально происходящие процессы.

Заметим также, что применение расчетно-теоретических методов, основанных на непосредственном представлении неустановившихся полей в нерегулярных волноводах суперпозицией монохроматических, в сочетании с одновременным применением методов численного определения последних вызывает значительные трудности при исследовании работы трактов в режиме коротких или обладающих крутыми фронтами импульсов. Практическая реализация такого подхода приводит к возникновению неконтролируемых погрешностей при вычислении обратного преобразования Фурье вследствие большой ширины частотных спектров. Это обстоятельство является другим важным основанием в пользу применения здесь упомянутого метода [3], который не предполагает использования разложений в частотные спектры.

Несмотря на возрастающий интерес к исследованию неустановившихся явлений в волноводной электродинамике, число опубликованных теоретических работ на эту тему весьма ограничено. Так, в монографии [5]

рассматриваются неустановившиеся волны в волноводах. Однако примененный здесь подход, основанный на разделении переменных, хотя и лишен указанных недостатков частотного анализа, оказывается практически пригодным лишь для нерегулярных волноводов лишь некоторых специальных форм.

Ниже приводятся постановка задачи о распространении импульса финитной начальной формы в нерегулярных линиях планарного типа и исследование возможностей вариационного метода нестационарных волноводных уравнений для получения численных расчетов с высокой точностью и контролем погрешности.

## 1. Постановка задачи. Нестационарные волноводные уравнения

Используя декартову систему координат, будем считать, что ось  $Y$  направлена поперек рассматриваемого волновода — нерегулярного слоя, заключенного между граничными поверхностями двух идеально проводящих тел. Пусть эти поверхности заданы своими уравнениями  $y = -a_1(z)$  и  $y = a_2(z)$ . Здесь  $z$  — координата вдоль оси  $Z$ , задающей направление распространения волны внутри слоя;  $a_1(z)$  и  $a_2(z)$  — непрерывные функции  $z$ , такие что  $a_1(z) \geq 0$  и  $a_2(z) \geq 0$ . Эти функции не обращаются одновременно в 0, вследствие чего ширина слоя  $\Delta(z) = a_1(z) + a_2(z) > 0$  при любом значении  $z$ . Пример профиля (перпендикулярного плоскости  $XOZ$  и проходящего через ось  $Z$  поперечного сечения) рассматриваемых линий передачи показан ниже на рис. 1. Профилем является плоский слой, заключенный между линиями  $y = a_1(z)$  и  $y = -a_2(z)$ . Предполагается, что при  $z < 0$  выполнены условия регулярности:  $a_1(z) = a_{10} = \text{const}$ ,  $a_2(z) = a_{20} = \text{const}$ , так что в полуслое  $z < 0$  ширина его  $\Delta(z) = a_{10} + a_{20} = \Delta_0 = \text{const}$ , а также независимость от  $z$  электрофизических характеристик заполняющей линию среды. Будем считать также, что форма профиля слоя, электрические характеристики среды, а также компоненты поля волны не зависят от координаты  $x$  вдоль оси  $X$ .

Далее при расчетах для значений всех переменных и параметров будем использовать безразмерные величины.

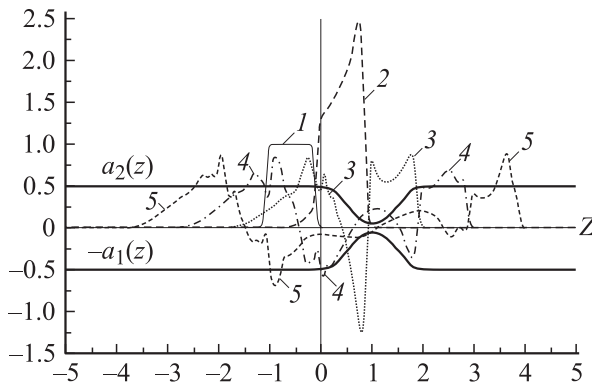


Рис. 1.

Для перехода к безразмерным переменным произведем нормировку всех величин с размерностью длины (пространственные координаты, функции  $a_1(z)$  и  $a_2(z)$  и др.) на некоторый удобный линейный масштаб  $L$ , а время  $t$  нормируем на  $L/c$  ( $c$  — скорость света в вакууме). Везде далее принято  $L = \Delta_0$ . Для удобства обозначения всех безразмерных величин оставляем неизменными. В частности, в результате такой нормировки имеем  $\Delta_0 = 1$  и  $c = 1$ .

Будем считать, что из регулярного полуслоя ( $z < 0$ ) в положительном направлении оси  $Z$  распространяется поперечная электромагнитная волна ( $TEM$ ) в виде финитного импульса, обладающего ограниченной в пространстве и времени формой. По мере проникновения импульса в нерегулярную часть слоя из-за его взаимодействия с нерегулярностями происходит его частичное отражение при сохранении  $TEM$ -структуры, а также возникает процесс частичной трансформации его в моды поперечно-магнитного ( $TM$ ) типа, распространяющиеся как вперед, так и назад.

Следуя вариационному методу, схема которого изложена в [3], для получения нестационарных волноводных уравнений рассматриваемого здесь нерегулярного планарного слоя в указанных выше предположениях используем билинейный функционал

$$J(\mathbf{H}, \mathbf{H}_0) = \int_{\Omega} \left\{ \varepsilon^{-1} (\text{rot } \mathbf{H}, \text{rot } \mathbf{H}_0) - \mu (\partial \mathbf{H} / \partial t, \partial \mathbf{H}_0 / \partial t) \right\} d^4 \Omega, \quad (1)$$

зависящий от вектор-функций  $\mathbf{H}(y, z, t)$  и  $\mathbf{H}_0(y, z, t)$  — напряженностей магнитного и вспомогательного полей;  $\varepsilon = \varepsilon(y, z)$  и  $\mu = \mu(y, z)$  — относительные диэлектрическая и магнитная проницаемости среды. Область интегрирования  $\Omega$  в (1) — внутренность отрезка 4-мерного цилиндра с осью  $t$  в качестве образующей ( $0 \leq t \leq T$ ) и границей отрезка ( $z_1 \leq z \leq z_2$ ) полосы линии передачи с единичной вдоль оси  $X$  шириной в качестве направляющей; при этом значения  $T$ ,  $z_1$  и  $z_2$  уточняются ниже. Поскольку подынтегральное выражение в (1) не зависит от координаты  $x$ , интегрирование по  $x$  сводится к умножению на 1, в результате чего 4-мерный интеграл (1) превращается в 3-мерный.

Условия стационарности

$$\delta_{\mathbf{H}_0} J(\mathbf{H}, \mathbf{H}_0) = 0 \quad (2)$$

при варьировании с условиями  $\delta \mathbf{H}_0(y, z, t_0) = \delta \mathbf{H}_0(y, z, t_0 + T) = \delta \mathbf{H}_0(y, z_{1,2}, t) = \mathbf{0}$  эквивалентны уравнениям Максвелла внутри  $\Omega$  и краевым условиям  $[\text{rot } \mathbf{H}, \mathbf{n}] = \mathbf{0}$  на границах металла, которые для финитных импульсов соответствуют условиям идеальной проводимости металла.

Единственную в нашем случае компоненту напряженности магнитного поля  $H(y, z, t)$ , имеющую направление

вдоль оси  $X$ , представим в виде разложения по модам волноводов сравнения

$$H(y, z, t) = \sum e_j(y, z) f_j(z, t) \quad (3)$$

с неизвестными амплитудами  $f_j(z, t)$ ;  $j = 1, 2, 3, \dots$ . В качестве набора базисных функций  $\{e_j(y, z)\}$  в разложении (3) используем функции распределения поля в волноводах сравнения для рассматриваемого здесь планарного случая

$$e_j(y, z) = \cos[\pi(j-1)(a_1(z) + y)/\Delta(z)]. \quad (4)$$

При этом амплитуда  $f_1(z, t)$  определяет магнитное поле моды  $TEM$ , а остальные  $f_j(z, t)$  ( $j \geq 2$ ) — магнитные поля мод  $TM_{0(j-1)}$  (волны  $E$ -типа).

Система волноводных уравнений для неустановившихся и импульсных процессов в рассматриваемой нерегулярной линии в матричных обозначениях имеет вид, по форме совпадающей с (7) из [3],

$$\begin{aligned} \partial/\partial z [G(z)\partial\mathbf{f}/\partial z + Q(z)\mathbf{f}] - Q^T(z)\partial\mathbf{f}/\partial z \\ - P(z)\mathbf{f} - T(z)\partial^2\mathbf{f}/\partial t^2 = \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (5)$$

Неизвестный вектор-столбец  $\mathbf{f}(z, t)$  образован своими координатами  $f_j(z, t)$  и имеет размерность  $N$ , равную числу учитываемых в сумме (1) слагаемых. Коэффициенты системы (5) — матрицы-функции  $G(z)$ ,  $Q(z)$ ,  $P(z)$  и  $T(z)$  с размерностью  $[N \times N]$  определяются в рассматриваемом нами случае матричными элементами

$$\begin{aligned} G_{ns}(z) &= \int_{-a_1(z)}^{a_2(z)} \varepsilon^{-1} e_s e_n dy, \\ T_{ns}(z) &= \int_{-a_1(z)}^{a_2(z)} \mu e_s e_n dy, \\ Q_{ns}(z) &= \int_{-a_1(z)}^{a_2(z)} \varepsilon^{-1} (e_s)_z (e_n)_z + (e_s)_y (e_n)_y dy, \\ P_{ns}(z) &= \int_{-a_1(z)}^{a_2(z)} \varepsilon^{-1} \left\{ (e_s)_z (e_n)_z + (e_s)_y (e_n)_y \right\} dy. \end{aligned} \quad (6)$$

В приведенных равенствах  $Q^T(z)$  — транспонированная  $Q(z)$ ; нижние индексы  $z$  и  $y$  соответствуют дифференцированию по этим переменным.

Отметим следующие особенности системы уравнений (5), вытекающие из свойств использованного при ее получении функционала (1) и условий (2).

1. Условие идеальной проводимости на границах металла для финитных импульсов достигается суммами (3) в пределе при возрастании  $N$  после подстановки в (3) точных решений (5).

2. Вследствие адекватности модели (5) строгому электродинамическому подходу погрешность получаемых с ее применением результатов численного расчета совпадает с погрешностью ее численной реализации. Эта погрешность эффективно контролируется с помощью: а) вычислительного эксперимента (с варьированием длин интервалов  $hz$  и  $ht$  при аппроксимации производных разностными отношениями, а также числа  $N$  учитываемых в (3) слагаемых); б) выполнения дополнительных энергетических расчетов.

Для случая  $\varepsilon$  и  $\mu$ , не зависящих от поперечной координаты ( $y$ ), множители  $\varepsilon^{-1} = \varepsilon^{-1}(z)$  и  $\mu = \mu(z)$  в выражениях (6) могут быть вынесены из-под интегралов

$$\begin{aligned} G_{ns}(z) &= \varepsilon^{-1}(z) g_{ns}(z), & T_{ns}(z) &= \mu(z) t_{ns}(z), \\ Q_{ns}(z) &= \varepsilon^{-1}(z) q_{ns}(z), & P_{ns}(z) &= \varepsilon^{-1}(z) p_{ns}(z). \end{aligned} \quad (6')$$

Интегралы  $g_{ns}(z)$ ,  $t_{ns}(z)$ ,  $q_{ns}(z)$  и  $p_{ns}(z)$  с учетом выражений (4) можно вычислить в аналитическом виде, их значения приведены в Приложении.

Систему (5) будем рассматривать совместно с начальными условиями

$$\begin{aligned} f_1(z, t) \Big|_{t=0} &= \varphi(z), & f_1'(z, t) \Big|_{t=0} &= -(\varepsilon\mu)^{-1/2} \varphi'(z), \\ f_j(z, t) \Big|_{t=0} &= 0, & f_j'(z, t) \Big|_{t=0} &= 0, \quad j = 2, 3, 4, \dots, \end{aligned} \quad (7)$$

которые отвечают некоторой заданной функции  $\varphi(z)$  — начальной форме импульса структуры  $TEM$ . Функцию  $\varphi(z)$  будем считать финитной и сосредоточенной внутри интервала  $\alpha < z < \beta$  в регулярной части слоя (т.е. при  $\alpha < \beta < 0$ ). Так как практически всегда интересна лишь некоторая конечная область  $\Lambda$  изменения обезразмеренных  $z$  и  $t$  ( $\Lambda = \{z_1 \leq z \leq z_2, 0 \leq t \leq T\}$ , причем  $z_1 < \alpha$ ,  $z_2 > 0$ ,  $T \leq \min\{|z_1 + \alpha|, |z_2 - \beta|\}$ ), то следует дополнить (7) вспомогательными граничными условиями

$$\mathbf{f}(z_1, t) = \mathbf{f}(z_2, t) = \mathbf{0}, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (8)$$

Задача для системы уравнений (5) с условиями (7), (8) является замкнутой и позволяет находить  $\mathbf{f}(z, t)$  численно на дискретной сетке в прямоугольнике  $\Lambda$ .

Приведем также выражение для погонной плотности (приходящейся на единицу ширины слоя в направлении оси  $X$ ) энергии импульса  $W(t)$

$$\begin{aligned} W(t) &= \int_{z_1}^{z_2} dz \int_{-a_1(z)}^{a_2(z)} dy \left\{ \mu \left( \sum e_j f_j \right)^2 \right. \\ &+ \varepsilon^{-1} \left[ \left( \int_0^t \sum e_j f_j d\eta \right)_y \right]^2 \\ &+ \varepsilon^{-1} \left[ (\varepsilon\mu)^{1/2} e_1 \varphi(z) - \int_0^t \left( \sum e_j f_j \right)_z d\eta \right]^2 \left. \right\}. \end{aligned} \quad (9)$$

Точному решению задачи должна отвечать  $W(t) = W(0) = W_0 = \text{const}$ , в связи с чем разброс расчетных значений  $W(t)$  относительно величины  $W_0$  будет нами использоваться для оценки погрешности численных расчетов.

Ниже рассматриваются примеры численных расчетов для непрерывно распределенной гладкой нерегулярности (раздел 2) и ее сочетания с некоторыми характерными включениями сосредоточенных нерегулярностей, приводящих к нарушению непрерывности матриц-функций (6) и (6') — изломы граничных поверхностей и скачки  $\varepsilon(z)$  (раздел 3).

В последующих расчетах начальная форма импульса (функция  $\varphi(z)$  в условиях (7)) будет задаваться нами трапециевидными графиками с возможным скруглением фронтов в следующих вариантах: а) геометрическая трапеция единичной высоты с расположенным на оси  $Z$  основанием, фронты прямолинейные, за ширину импульса  $z_p$  принимается длина средней линии трапеции, за ширину фронта переднего  $z_+$  и заднего  $z_-$  принимаем длину проекции на ось  $Z$  соответствующей ее боковой стороны; б) трапециевидная фигура, получающаяся путем замены боковых сторон трапеции (а) графиками четвертьволновых отрезков возведенных в куб синусоид; в) трапециевидная фигура, получающаяся после замены боковых сторон трапеции (а) отрезками графиков полиномов 5-й степени, однозначно определяемых из требований их непрерывного перехода в конечных точках в ось  $Z$  и в верхнее плато трапеции при условиях непрерывности производных первого и второго порядков в этих точках.

Трапециевидным импульсам вариантов (б) и (в), которые получаются из геометрической трапеции (а), будем приписывать значения параметров  $z_p$ ,  $z_+$  и  $z_-$ , равные их значениям для исходной геометрической трапеции. Отметим, что при  $\varepsilon = \mu = 1$  для длительности импульса ( $t_p$ ) переднего ( $t_+$ ) и заднего ( $t_-$ ) временных фронтов имеем  $t_p = z_p$ ,  $t_+ = z_-$  и  $t_- = z_+$ .

Для численного решения задачи (3), (5), (6) в прямоугольнике  $\Lambda$  выбираем равномерные сетки по переменным  $z$  и  $t$  с шагами  $hz$  и  $ht$  соответственно. Применение явной трехслойной схемы дает возможность определить значения  $\mathbf{f}$  на  $(n+1)$ -м слое по  $t$  по значениям  $\mathbf{f}$  на  $n$ -м и  $(n-1)$ -м слоях. Использование для производной  $\mathbf{f}_t$  в точке  $(z_i, t_j)$  обычной аппроксимации

$$(\partial^2 \mathbf{f} / \partial t^2)_{i,j} = (\mathbf{f}_{i,j+1} - 2\mathbf{f}_{i,j} + \mathbf{f}_{i,j-1}) / (ht)^2, \quad \mathbf{f}_{i,j} = \mathbf{f}(z_i, t_j)$$

позволяет получить из (5) основное расчетное соотношение в виде

$$\mathbf{f}_{i,j+1} = 2\mathbf{f}_{i,j} - \mathbf{f}_{i,j-1} + (ht)^2 \left\{ T^{-1} \partial / \partial z [G \partial \mathbf{f} / \partial z + Q \mathbf{f}] - T^{-1} Q^r \partial \mathbf{f} / \partial z - T^{-1} P \mathbf{f} \right\}_{i,j},$$

в котором для вычисления первых и вторых производных по  $z$  применяются формулы дифференцирования соответственно по 5 и 7 точкам.

Приводимые ниже результаты численных расчетов, если иное в каждом конкретном случае не оговаривается специально, соответствуют выбору  $N = 7$ , сетки с шагами  $hz = 0.01$ ,  $ht = 0.004$  и импульсов с параметрами  $z_p = 1$ ,  $z_+ = z_- = 0.2$ .

## 2. Прохождение импульса через гофр

Рассмотрим пример линии, содержащей непрерывно распределенную гладкую нерегулярность в виде симметричного гофра

$$a_1(z) = a_2(z) = \begin{cases} 0.5 & \text{при } z < 0 \text{ и } z > 2, \\ 0.5 - a_0 \sin^2(\pi z / 2) & \text{при } 0 \leq z \leq 2 \end{cases} \quad (10)$$

с глубиной гофра  $a_0$  ( $0 < a_0 < 0.5$ ), так что  $\Delta_0 = 1$ , а в самом узком сечении (при  $z = 1$ ) ширина просвета  $\Delta_{\min} = (1 - 2a_0)$ . Расчеты проводились при  $\varepsilon = \mu = 1$ .

На рис. 1 помимо профиля линии передачи, содержащей распределенную нерегулярность (10) при  $\Delta_{\min} = 0.1$  ( $a_0 = 0.45$ ), приведены графики значений напряженности магнитного поля  $H$  в средней плоскости ( $y = 0$ ) линии как функции  $z$  при фиксированных значениях  $t = 0, 1, 2, 3$  и  $4$  (кривые 1–5 соответственно). Из приведенных кривых видна динамика изменения формы и картина возникновения отражений для импульса, обладающего в начальный момент времени (кривая 1) структурой  $TEM$  и формой (б). Из сопоставления кривых 4 и 5, отвечающих моментам времени, когда головная часть импульса после преодоления гофра снова попадает в регулярный участок линии (при  $z > 2$ ), видно, что процесс деформации головной части импульса не прекращается. Это связано с тем, что к этому времени на этот участок вместе с существовавшей при  $t = 0$  недисперсной модой  $TEM$  проникают возникшие позже дисперсные моды  $TM$ -типа.

Соответствующие  $TEM$ -компоненте импульса амплитуды  $f_1(z, t)$  как функции  $z$  и при тех же, что и для рис. 1, фиксированных значениях  $t$  для импульса с той же начальной формой (б) показаны на рис. 2. Номерам

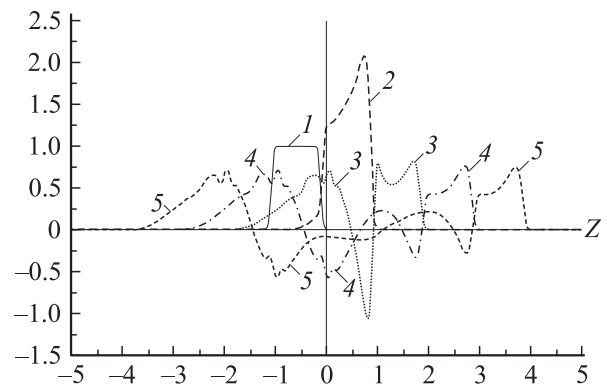


Рис. 2.

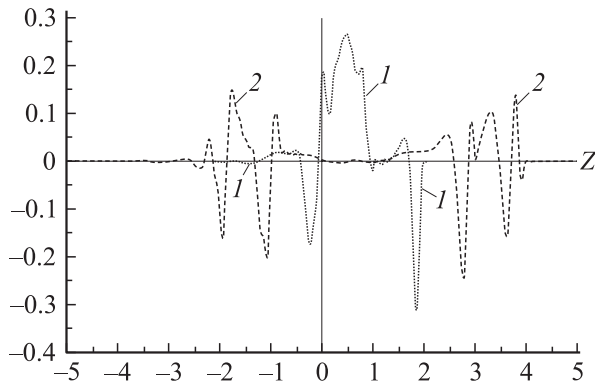


Рис. 3.

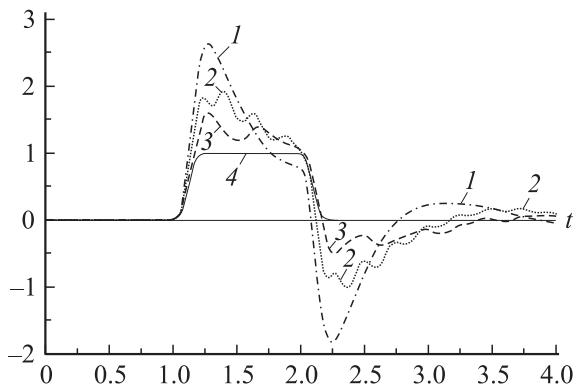


Рис. 4.

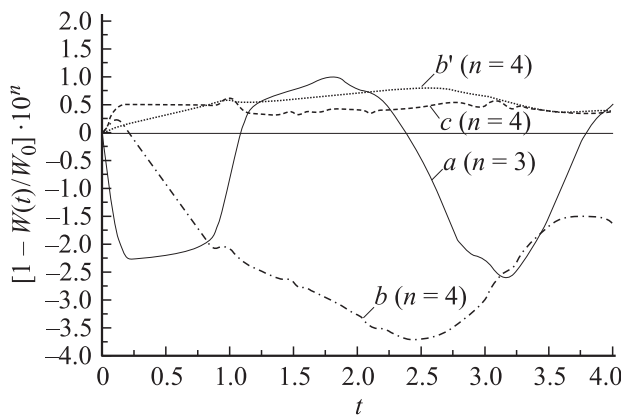


Рис. 5.

кривых на рис. 2 отвечают те же значения  $t$ , что и на рис. 1. Как и следовало ожидать, после выхода головной части импульса во второй регулярный участок линии деформация (кривые 4 и 5 при  $z > 2$ )  $TEM$ -компоненты головной части импульса прекращается.

Для того же начального импульса на рис. 3 представлены распределения моды  $E_{02}$ , отсутствовавшей при  $t = 0$  ( $f_3(z, 0) \equiv 0$ ) (кривая 1) и возникающей в последующие моменты времени (для  $t = 2$  (кривая 1) и 4 (кривая 2)) в результате трансформации моды  $TEM$  при прохождении импульса через нерегулярный участок

линии. Отметим, что в отличие от приведенного в [6] примера с несимметричным просветом в нашем случае в силу симметрии геометрии относительно плоскости  $y = 0$  получаем  $f_2(z, t) \equiv 0$ , вследствие чего мода  $E_{01}$  не образуется.

На рис. 4 представлены значения  $H$  как функции времени в середине наиболее узкого сечения ( $z = 1, y = 0$ ) при значениях  $\Delta_{\min} = 0.10$  (кривая 1), 0.25 (кривая 2), 0.50 (кривая 3) при тех же начальной форме импульса и его параметрах. Для сравнения здесь же приведена зависимость  $H(t)$  в той же точке в отсутствие гофра (в (10)  $a_0 = 0$ ), когда линия передачи становится регулярной (кривая 4).

Представление о точности вычислений можно получить из сопоставления кривых зависимости от  $t$  величины  $[1 - W(t)/W_0]$ , где  $W_0 = W(0)$ , на рис. 5 и данных табл. 1. Кривая  $a$  (для нее в обозначениях на вертикальной оси значение  $n = 3$ ) соответствует импульсу с начальной формой (a) — геометрическая трапеция, кривые  $b$  ( $n = 4$ ) и  $c$  ( $n = 4$ ) отвечают импульсам с начальными трапециевидными формами (b) и (c) соответственно. Здесь же приведены полученные на  $[2 \times 2]$  раза более мелкой сетке ( $hz = 0.005$  и  $ht = 0.002$ ) результаты для импульса формы (b) — кривая  $b'$  ( $n = 4$ ). Сопоставление кривых  $b$  и  $b'$  показывает, что после дробления шагов счетной сетки в  $[2 \times 2]$  раза погрешность уменьшилась  $\sim$  в 5 раз. Из представленных кривых видно также, что при изменении формы фронтов импульса в начальный момент времени по цепочке (a)  $\rightarrow$  (b)  $\rightarrow$  (c) (при неизменных значениях параметров импульса  $z_p, z_+$  и  $z_-$  и параметров счетной сетки  $hz$  и  $ht$ ) происходит увеличение точности расчетов для каждого звена цепочки  $\sim$  на 1 порядок. Это связано с тем, что при движении вдоль этой цепочки происходит возрастание качества дифференциальных свойств финитной функции  $\varphi(z)$  в начальных условиях (5). Так, в звене (a)  $\rightarrow$  (b) всюду непрерывная  $\varphi(z)$ , но обладающая изломами (в 4 вершинах трапеции), переходит во всюду гладкую  $\varphi(z)$ , но с изломами первой производной (в 2 точках сопряжения с верхним плато), которая в свою очередь в звене (b)  $\rightarrow$  (c) переходит в  $\varphi(z)$  со всюду непрерывной второй производной.

Таблица 1.

$j$	(a)	(b)	(c)
1	$9.8729 \cdot 10^{-1}$	$9.8132 \cdot 10^{-1}$	$9.8067 \cdot 10^{-1}$
2	$1.1780 \cdot 10^{-24}$	$1.4727 \cdot 10^{-24}$	$1.4284 \cdot 10^{-24}$
3	$1.2406 \cdot 10^{-2}$	$1.6568 \cdot 10^{-2}$	$1.6901 \cdot 10^{-2}$
5	$9.2914 \cdot 10^{-4}$	$2.5102 \cdot 10^{-3}$	$2.5583 \cdot 10^{-3}$
7	$1.0327 \cdot 10^{-4}$	$4.0804 \cdot 10^{-4}$	$4.3313 \cdot 10^{-4}$
9	$5.0128 \cdot 10^{-5}$	$7.1098 \cdot 10^{-5}$	$7.9569 \cdot 10^{-5}$
11	$2.6025 \cdot 10^{-5}$	$1.5548 \cdot 10^{-5}$	$1.6966 \cdot 10^{-5}$
13	$1.1362 \cdot 10^{-5}$	$6.4971 \cdot 10^{-6}$	$6.4337 \cdot 10^{-6}$
15	$6.3485 \cdot 10^{-6}$	$4.5141 \cdot 10^{-6}$	$4.5382 \cdot 10^{-6}$
$W^r/W_0$	$9.6848 \cdot 10^{-5}$	$1.0049 \cdot 10^{-4}$	$1.1042 \cdot 10^{-4}$

Представление о погрешностях, обусловленных заменой в приведенных выше расчетах бесконечной суммы (3) суммой ее первых  $N = 7$  слагаемых, можно получить из табл. 1. Здесь приведены относительные значения парциальных энергий  $W_j/W_0$  для мод  $TEM$  ( $j = 1$ ),  $E_{01}$  ( $j = 2$ ), ...,  $E_{014}$  ( $j = 15$ ), рассчитанные при  $t = 7$  для импульсов с начальными формами (а), (б) и (с), но при  $N = 15$ . Четным значениям  $j$  соответствуют полученные численно значения  $W_j/W_0$ , не превышающие  $\sim 10^{-24}$ , вместо точных нулей, поэтому соответствующие строки в таблице пропущены (кроме строки  $j = 2$ ). В нижней строке табл. 1 приведена оценка относительной энергии  $W^r/W_0$  неучтенного при выборе  $N = 7$  остатка суммы (3), при этом оценка энергии остатка  $W^r$  определялась по формуле (9) после замены в ней бесконечной суммы (3) конечной суммой ( $8 \leq j \leq 15$ ). Отметим, что определение величины  $W^r$  путем суммирования ее парциальных составляющих  $W_j$  могло бы оказаться некорректным из-за неортогональности мод волноводов сравнения для нерегулярных линий.

Из сопоставления рис. 5 и данных табл. 1 видно, что выбор значения  $N = 7$  при задании относительной среднеквадратичной погрешности расчета напряженности поля на уровне не выше  $\sim 1/2 \max\{[1 - W(t)/W_0], W^r/W_0\} \approx 10^{-4}$  в рассматриваемом примере оправдан, так как обеспечивает условие  $\max[1 - W(t)/W_0] \sim W^r/W_0$ . Отметим, что для менее глубоких гофров та же точность расчетов может быть достигнута и при меньших значениях  $N$ .

### 3. Другие примеры

Рассмотрим случаи сочетания распределенных нерегулярностей с сосредоточенными на примере негладкого сочленения регулярной планарной линии с гофром при наличии диэлектрического включения со скачками диэлектрической проницаемости на границах включения. В отличие от рассмотренной выше формы гофра (10) здесь мы принимаем

$$a_1(z) = a_2(z) = \begin{cases} 0.5 & \text{при } z < 0 \text{ и } z > 2, \\ 0.5 - a_0 \sin(\pi z/2) & \text{при } 0 \leq z \leq 2 \end{cases} \quad (11)$$

при  $\mu = 1$ ,  $\varepsilon(z) = \varepsilon_- = \text{const}$  при  $z < 0$  и  $z > 2$  и  $\varepsilon(z) = \varepsilon_+ = \text{const}$  при  $0 < z < 2$ . На рис. 6 представлен профиль такой линии при  $a_0 = 0.45$ ,  $\Delta = 1$ ,  $\Delta_{\min} = 0.1$ .

При распространении импульса, удовлетворяющего начальным условиям (7), из первого регулярного полуплосия ( $z < 0$ ) во втором ( $z > 2$ ) ему придется преодолеть помимо распределенной гладкой нерегулярности в виде гофра также и сосредоточенные нерегулярности: 1) изломы граничных поверхностей — нарушение гладкости определяемых (11) функций  $a_1(z)$  и  $a_2(z)$  при  $z = 0$  и  $z = 2$ ; 2) скачкообразные изменения  $\varepsilon(z)$  также при  $z = 0$  и  $z = 2$ . Появление сосредоточенных нерегулярностей, как это непосредственно вытекает

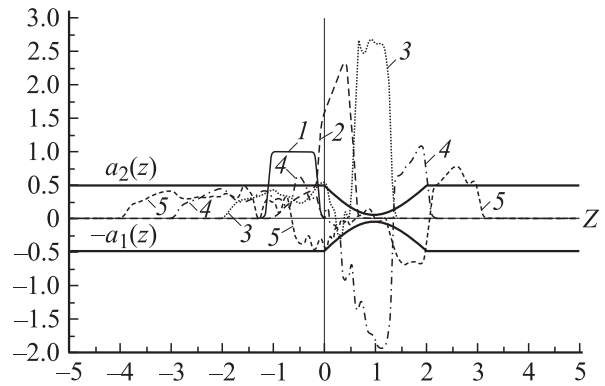


Рис. 6.

из (6) и (6'), приводит к нарушению непрерывности (либо гладкости) матричных коэффициентов системы волноводных уравнений (5). Во всех подобных случаях отклонения поведения матричных коэффициентов этой системы в отдельных точках на оси  $Z$  следует в каждой такой точке систему (5) доопределять условиями „сшивки“, которые соответствуют необходимым требованиям непрерывности поперечных составляющих напряженности магнитного и электрического полей.

Отметим, однако, что учет условий сшивки существенно усложнит алгоритм расчета, так как сделает неизбежным переход к применению неявных схем. Как следствие, это приведет к значительному увеличению объема вычислительной работы и при прочих равных условиях — к уменьшению точности вычислений из-за возрастания накапливающихся при округлении погрешностей. Ниже будет показано, что для рассматриваемых здесь примеров сосредоточенных нерегулярностей указанных осложнений можно избежать путем применения приближенного приема „сглаживания“, позволяющего отказаться от применения условий сшивки, распространив систему (5) на всю внутренность определенного выше прямоугольника  $\Lambda$ , и тем самым сохранить возможность использования для расчетов явной схемы со всеми ее преимуществами. Будет показано также, что для рассматриваемых примеров возникающие из-за применения такого закругления дополнительные погрешности могут быть сделаны незначительными.

В дальнейших расчетах принято  $a_0 = 0.45$ ,  $\varepsilon_- = 1$ ,  $\varepsilon_+ = 2$ .

На рис. 6 помимо профиля линии приведены значения напряженности магнитного поля  $H$  как функции  $z$  в средней плоскости линии ( $y = 0$ ), значения  $t = 0, 1, 2, 3$  и  $4$  фиксированы (кривые 1–5 соответственно). Приведенные кривые описывают динамику изменения во времени формы импульса, обладающего в начальный момент  $t = 0$  формой (б) (кривая 1). Сглаживание функции  $\varepsilon(z)$  осуществлялось путем замены ее значений в 11 точках сетки по  $Z$  в окрестности каждой из точек скачка (при  $z = 0$  и  $z = 2$  и в примыкающих к каждой из них 5 точках слева и справа) значениями многочлена 5-й степени, однозначно определяемого из

Таблица 2.

$j$	(5, 0)	(5, 7)	(5, 11)	(0, 11)
1	$9.7905 \cdot 10^{-1}$	$9.7610 \cdot 10^{-1}$	$9.7588 \cdot 10^{-1}$	$9.7588 \cdot 10^{-1}$
2	$2.8608 \cdot 10^{-24}$	$2.9541 \cdot 10^{-24}$	$3.0585 \cdot 10^{-24}$	$3.0925 \cdot 10^{-24}$
3	$2.1332 \cdot 10^{-2}$	$2.1753 \cdot 10^{-2}$	$2.1884 \cdot 10^{-2}$	$2.1891 \cdot 10^{-2}$
5	$3.2702 \cdot 10^{-3}$	$3.3279 \cdot 10^{-3}$	$3.3750 \cdot 10^{-3}$	$3.3746 \cdot 10^{-3}$
7	$1.3490 \cdot 10^{-3}$	$1.3639 \cdot 10^{-3}$	$1.3700 \cdot 10^{-3}$	$1.3658 \cdot 10^{-3}$
9	$2.9793 \cdot 10^{-4}$	$2.7792 \cdot 10^{-4}$	$2.7650 \cdot 10^{-4}$	$2.7842 \cdot 10^{-4}$
11	$7.8100 \cdot 10^{-5}$	$6.9677 \cdot 10^{-5}$	$6.7895 \cdot 10^{-5}$	$6.7055 \cdot 10^{-5}$
13	$2.5970 \cdot 10^{-5}$	$2.1262 \cdot 10^{-5}$	$2.0937 \cdot 10^{-5}$	$2.1023 \cdot 10^{-5}$
15	$1.6246 \cdot 10^{-5}$	$1.3926 \cdot 10^{-5}$	$1.3874 \cdot 10^{-5}$	$1.3861 \cdot 10^{-5}$
$W^r/W_0$	$4.2455 \cdot 10^{-4}$	$3.8984 \cdot 10^{-4}$	$3.8565 \cdot 10^{-4}$	$3.8667 \cdot 10^{-4}$

требований непрерывного перехода в конечных точках в константы  $\varepsilon_-$  и  $\varepsilon_+$  при условиях сохранения непрерывности производных первого и второго порядков в этих точках. Сглаживание формы граничных поверхностей производилось путем замены значений функций  $a_1(z)$  и  $a_2(z)$  в 5 точках сетки по  $Z$  в окрестности каждой из точек излома (точки  $z = 0$  и  $z = 2$  и по 2 точки, примыкающие к ним слева и справа) значениями многочленов 3-й степени, однозначно определяемых из требований сохранения непрерывности и гладкости.

Из приведенных кривых видно, что при последовательном переходе от положения  $t = 0$  (кривая 1) к положению  $t = 4$  (кривая 5) через положения  $t = 1, 2$  и 3 (кривые 2–4) происходит сначала сужение головной части импульса и затем восстановление ее ширины из-за перехода импульса из оптически менее плотной среды в более плотную и затем снова в менее плотную.

Относительные значения парциальных энергий  $W_j/W_0$  для мод  $TEM$  ( $j = 1$ ),  $E_{01}$  ( $j = 2$ ), ...,  $E_{014}$  ( $j = 15$ ), рассчитанные при  $t = 7$  для импульсов с начальной формой (b) при  $N = 15$ , приведены в табл. 2. Столбцы таблицы отвечают различным значениям  $(p, q)$ , где  $p$  и  $q$  — числа точек сетки по  $Z$ , используемых для сглаживания полиномами 5-й степени каждого излома границы ( $p$ ) и каждого скачка  $\varepsilon(q)$ . При этом нулевые значения  $p$  или  $q$  означают отсутствие сглаживания.

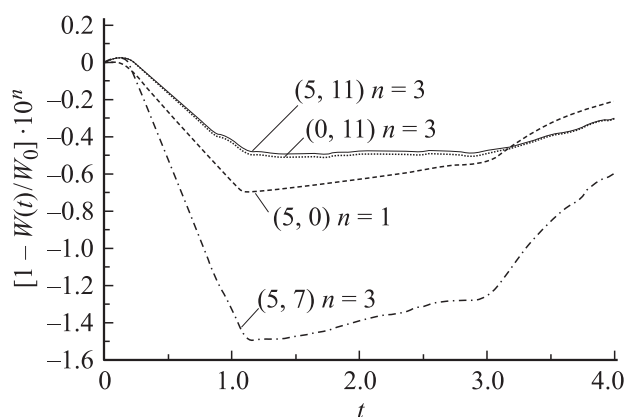


Рис. 7.

Полученные численно для четных  $j$  значения  $W_j/W_0$  не превышают  $\sim 10^{-24}$  (вместо точных нулей) и в таблице не приводятся (кроме строки  $j = 2$ ). В нижней строке табл. 2 приведена оценка относительной энергии  $W^r/W_0$  неучитывавшегося ранее при выборе  $N = 7$  остатка суммы (3).

На рис. 7 представлены зависимости величины  $[1 - W(t)/W_0]$  от  $t$  при  $0 \leq t \leq 4$ ,  $N = 7$  для того же импульса и для тех же, что и в табл. 2, значений  $(p, q)$ . Из данных табл. 2 и рис. 7 вытекает следующее. Сглаживание изломов границы в рассмотренных примерах не дает ощутимого выигрыша, как это вытекает из сопоставления результатов для вариантов (5, 11) и (0, 11), и поэтому может не применяться. В то же время сглаживание скачков  $\varepsilon$  дает весьма существенный выигрыш: в вариантах (5, 0), (5, 7) и (5, 11) верхняя оценка относительной среднеквадратичной погрешности напряженности поля  $\sim 1/2 \max\{[1 - W(t)/W_0], W^r/W_0\}$  составляет соответственно  $\sim 3 \cdot 10^{-2}$ ,  $7 \cdot 10^{-4}$  и  $2 \cdot 10^{-4}$ . Столь значительные различия в эффектах от сглаживания объясняются тем, что скачки  $\varepsilon$  приводят к возникновению разрывов матричного коэффициента  $G(z)$  при старшей производной по  $z$  в (5), в то время как наличие изломов границы не влияет на непрерывность  $G(z)$ .

## Заключение

Как видим, расчеты с применением нестационарных волноводных уравнений дают возможность обеспечить относительную среднеквадратичную погрешность определения напряженности поля в импульсе не хуже  $\sim 10^{-4}$ , что значительно перекрывает достигнутую в эксперименте точность измерений. Этот вывод относится как к рассмотренным распределенным неоднородностям (глубокий гофр), так и к их комбинациям с сосредоточенными неоднородностями (изломы граничных поверхностей, скачки диэлектрической проницаемости). Это свидетельствует о новых возможностях при исследованиях по проблеме UWB EMP и, в частности, о новых подходах при разработке эталонных полеобразующих систем и устройств для калибровки датчиков UWB EMP.

**Приложение.**

Выражения для функций  $g_{ns}(z)$ ,  $t_{ns}(z)$ ,  $q_{ns}(z)$ ,  $p_{ns}(z)$ .

1. Функции  $g_{ns}(z)$  и  $t_{ns}(z)$ 

$$g_{11} = \Delta(z);$$

$$g_{1s} = g_{n1} = 0, \quad n > 1 \text{ и } s > 1;$$

$$g_{ns} = \frac{1}{2} \Delta(z) \delta_{ns}, \quad n > 1 \text{ и } s > 1, \quad \delta_{ns} \text{ — символ Кронекера;}$$

$$t_{ns} = g_{ns} \text{ для любых } n \text{ и } s \geq 1.$$

2. Функции  $q_{ns}(z)$ 

$$q_{n1} = 0, \quad n \geq 1;$$

$$q_{1s} = [(-1)^s a_2'(z) - a_1'(z)], \quad s > 1, \quad (') \text{ — знак производной;}$$

$$q_{ns} = \frac{(s-1)^2}{(n-1)^2 - (s-1)^2}$$

$$\times [a_1'(z) + (-1)^{n+s} a_2'(z)], \quad n > 1 \text{ и } s > 1, \quad n \neq s;$$

$$q_{nn} = -\frac{1}{4} \Delta'(z), \quad n > 1.$$

3. Функции  $p_{ns}(z)$ 

$$p_{1s} = p_{n1} = 0, \quad n \geq 1 \text{ и } s \geq 1;$$

$$p_{ns} = \frac{4(s-1)^2(n-1)^2}{[(s-1)^2 - (n-1)^2]^2} \frac{\Delta'(z)}{\Delta(z)}$$

$$\times [a_1'(z) + (-1)^{n+s} a_2'(z)], \quad n > 1 \text{ и } s > 1, \quad n \neq s;$$

$$p_{nn} = \frac{\pi^2(n-1)^2}{6\Delta(z)}$$

$$\times \left\{ 3 - 3a_1'(z)a_2'(z) + [\Delta'(z)]^2 \right\} - \frac{[\Delta'(z)]^2}{4\Delta(z)}, \quad n > 1.$$

**Список литературы**

- [1] Ultra-Wideband, Short-Pulse Electromagnetics 3 / Ed. С.Е. Baum, L. Carin, А.Р. Stone. New York: Plenum Press, 1997.
- [2] Короза В.И., Нечаев М.Н., Цветков С.А. // Письма в ЖТФ. 1995. Т. 21. Вып. 11. С. 1–5.
- [3] Короза В.И. // Письма в ЖТФ. 1996. Т. 22. Вып. 21. С. 6–9.
- [4] Короза В.И., Кондрашов В.Е. // Письма в ЖТФ. 1996. Т. 22. Вып. 17. С. 91–94.
- [5] Борисов В.В. Неустановившиеся поля в волноводах. Л.: Изд-во Ленинградского ун-та, 1991. 156 с.
- [6] Голиков М.Н., Короза В.И., Михайлов В.Н. // ДАН. 2002. Т. 385. № 1. С. 51–53.