

01;03

## Генерация электрогидродинамических волн на границе раздела жидкость–вакуум

© А.А. Шутов

Филиал научно-исследовательского физико-химического института им. Л.Я. Карпова,  
249030 Обнинск, Россия  
e-mail: fci@meteo.ru

(Поступило в редакцию 26 октября 2001 г. В окончательной редакции 31 января 2002 г.)

В линейном приближении исследована электрогидродинамическая задача устойчивости поверхности вязкой жидкости на границе с воздухом с учетом кинетики переноса поверхности заряда. Определены критические напряженности электрического поля, нарушающие устойчивость плоской поверхности раздела. Найдены условия генерации незатухающих волн на межфазной границе.

### Введение

Электростатическое приближение, изучающее поведение идеальных проводников или диэлектриков, допустимо использовать в рамках аппарата невязкой жидкости [1,2]. Напротив, задача движения жидкости конечной проводимости должна рассматриваться только в вязкой постановке. Генерация зарядовых плотностей на межфазных поверхностях приводит к возникновению касательных электрических сил на границе, для компенсации которых необходимы вязкие натяжения. Поверхностный заряд должен согласовывать между собой конвективные и омические точки. Существенной здесь может оказаться не только величина токов, но и характер омической связи межфазной поверхности с источниками зарядов. В частности, эксперимент дает различные критические напряженности дестабилизации плоской поверхности в зависимости от способа подачи напряжения: внезапное включение поля или постепенное повышение напряженности [3,4]. Под неустойчивостью здесь понимается реакция жидкой системы на малое возмущение границы раздела, приводящая к спонтанному росту возмущения и последующей эмиссии некоторого количества жидкости со свободной поверхности. Анализ подобной задачи для границы раздела жидкостей с равными кинематическими вязкостями выявил наличие неустойчивых и затухающих возмущений [5]. Оказывается, что вязкая система может при некоторых условиях возбуждать незатухающие поверхностные волны. Например, в касательном электрическом поле к плоской межфазной поверхности образуется стоячая волна при немного меньшей напряженности, чем критическая [6].

Ниже рассматривается задача устойчивости и генерации незатухающих волн в ортогональном к границе раздела поле. В отличие от работ [3,5] предполагается, что в исходном состоянии межфазная поверхность заряжена.

### Теория

Кинематическое уравнение поверхностного заряда плотности  $\sigma$  на поверхности  $q_3 = f(q_1, q_2, t)$  описывается соотношением [7]

$$\frac{\partial}{\partial t} (\sigma \sqrt{g_1 g_2}) + \frac{\partial}{\partial q_1} (\sigma V_1 \sqrt{g_2}) + \frac{\partial}{\partial q_2} (\sigma V_2 \sqrt{g_1}) + \sqrt{g_1 g_2} (\lambda_2 E_{2n} - \lambda_1 E_{1n}) = 0, \quad (1)$$

где ортогональная криволинейная система координат  $q_1, q_2, q_3$  на межфазной поверхности выбирается следующим образом: единичный орт координаты  $q_3$  направлен по нормали к поверхности из среды 1 в среду 2, а  $q_1, q_2$  образуют ортогональную сеть.

Плотность заряда определяется обычным в электродинамике способом через объемную плотность заряда  $\rho_e$

$$\sigma = \int_{f-\delta}^{f+\delta} \rho_e h_3 dq_3.$$

Здесь метрические коэффициенты поверхности связаны с коэффициентами Ламе  $h_i$  перехода от прямоугольной к криволинейной системе координат следующим образом:  $g_i(q_1, q_2) = h_i^2(q_1, q_2, q_3 = f)$ ,  $i = 1, 2$ . В уравнении введены обозначения:  $V_1, V_2$  есть  $q_1$ - и  $q_2$ -компоненты скорости жидкости на границе;  $\lambda_1, \lambda_2$  — проводимости;  $E_{1n}, E_{2n}$  — нормальные компоненты напряженности по разные стороны от межфазной поверхности. Рассмотрим плоские движения границы жидкости, занимающей нижнее полупространство в декартовых координатах  $x, z$  в однородном электрическом поле. Свободная поверхность описывается уравнением  $z = f(x, t)$ . Сила тяжести  $\mathbf{g}$  направлена вертикально вниз, противоположно положительному направлению оси  $z$ , напряженность электрического поля над жидкостью равна  $E_{20}$ . Предполагаем, что перенос заряда осуществляется в отсутствие объемного заряда. Задача формулируется следующим

образом

$$\partial \mathbf{V} / \partial t + \mathbf{V} \nabla \mathbf{V} = -\nabla p / \rho + \nu \Delta \mathbf{V} + \mathbf{g}, \quad \operatorname{div} \mathbf{V} = 0, \quad (2)$$

$$\Delta \varphi_{1,2} = 0 \quad (3)$$

с условием на границе  $z = f$

$$\partial f / \partial t - w + u \partial f / \partial x = 0, \quad (4)$$

$$\partial(\sigma \sqrt{1 + f'^2}) / \partial t + \partial(\sigma u) / \partial x - \lambda E_{n1} \sqrt{1 + f'^2} = 0, \quad (5)$$

$$\varphi_1 = \varphi_2, \quad \varepsilon \mathbf{n} \nabla \varphi_1 - \mathbf{n} \nabla \varphi_2 = \sigma / \varepsilon_0, \quad (6)$$

$$\mathbf{p}_{n1} = \mathbf{n} T f'' / (1 + f'^2)^{3/2} + \mathbf{F}_e, \quad (7)$$

$$\mathbf{E}_e = (D_{2n} \mathbf{E}_2 - D_{1n} \mathbf{E}_1) - (D_2 E_2 - D_1 E_1) \mathbf{n} / 2, \quad (8)$$

$$z \rightarrow \infty: E_{2z} \rightarrow E_{20}.$$

Компоненты скорости  $\mathbf{V}$  обозначены согласно соответствию  $(u, w) \rightarrow (x, z)$ . Плотность, кинематическая вязкость, поверхностное натяжение и диэлектрическая проницаемость жидкости равны соответственно  $\rho, \nu, T$  и  $\varepsilon$ . Вязкость, плотность, давление и проводимость среды над жидкостью нулевые. Электрический потенциал обозначен  $\varphi$ ,  $\mathbf{E} = -\nabla \varphi$ ,  $D = \varepsilon \varepsilon_0 E$ , где  $\varepsilon_0$  — диэлектрическая константа. Уравнение (5) для поверхностного заряда является следствием уравнения (1) и учитывает как конвективный поток заряда вдоль деформируемой поверхности, так и омический ток жидкости. Нижние индексы 1 и 2 у потенциала обозначают величину внутри и вне жидкости соответственно. Вектор  $\mathbf{n}$  есть внешняя нормаль по отношению к жидкости, штрихом обозначено дифференцирование по  $x$ . Вектор  $\mathbf{p}_{n1}$  в граничном условии (7) есть вектор вязких натяжений. Соотношение (8) есть поверхностная плотность электрической силы [8].

Система уравнений (2)–(8) допускает следующее решение для плоской границы раздела  $z = 0$ :

$$\mathbf{V}_0 = 0, \quad f_0 = 0, \quad \varphi_{20} = -E_{20} z, \quad (9)$$

$$\varphi_{10} = z E_{20} \exp(-t/\tau) / \varepsilon,$$

$$p_0 = -\rho g z - E_{20}^2 (1 - \exp(-2t/\tau)) / \varepsilon / 2,$$

$$\sigma_0 = \varepsilon_0 E_{20} (1 - \exp(-t/\tau)), \quad (10)$$

где  $\tau = \varepsilon \varepsilon_0 / \lambda$ .

Положим, что время релаксации заряда велико по сравнению с характерным временем развития гидродинамической неустойчивости. Тогда на таких временных масштабах потенциал и поверхностная плотность заряда являются медленно меняющимися функциями. Далее, при формулировке возмущенной задачи положим, что невозмущенные напряженности над жидкостью  $E_{20}$  и в жидкости  $E_{10}$  постоянны. Потенциал в жидкости, поверхностная плотность заряда и давление равны соответственно

$$\varphi_{10} = -E_{10} z, \quad \sigma_0 = \varepsilon_0 (E_{20} - \varepsilon E_{10}),$$

$$p_0 = -\rho g z - (E_{20}^2 - \varepsilon E_{10}^2) / 2. \quad (11)$$

Рассмотрим задачу (2)–(8) для очень вязких жидкостей, когда инерционными членами в (2) можно пренебречь. Определим возмущения следующим образом:

$$A = A_0 + \bar{A},$$

где  $A_0$  есть любая величина в (9), (11),  $\bar{A}$  — возмущение.

С точностью до линейных членов по амплитудам имеем следующую задачу:

$$\nabla p = \mu \Delta \mathbf{V}, \quad \operatorname{div} \mathbf{V} = 0, \quad \Delta \varphi_{1,2} = 0$$

с условиями на  $z = 0$

$$w = \partial f / \partial t, \quad \partial \sigma / \partial t + \sigma_0 \partial u / \partial x - \lambda E_{n1} = 0,$$

$$\varphi_2 - \varphi_1 = (E_{20} - E_{10}) f, \quad \varepsilon \mathbf{n} \nabla \varphi_1 - \mathbf{n} \nabla \varphi_2 = \sigma / \varepsilon_0,$$

$$-p + 2\mu \partial w / \partial z + \rho g f - T f'' = \varepsilon_0 E_{20} E_{2z} - \varepsilon \varepsilon_0 E_{10} E_{1z},$$

$$\mu (\partial u / \partial z + \partial w / \partial x) = \varepsilon_0 (E_{20} E_{2x} - \varepsilon E_{10} E_{1x})$$

$$+ f' \varepsilon_0 (E_{20}^2 - \varepsilon E_{10}^2) / 2.$$

Здесь  $\mu$  — вязкость жидкости, знак черты у возмущений опущен. Полагая, что зависимость от  $x$  и  $t$  в каждой переменной описывается множителем  $\exp(st + ikx)$ , находим следующее дисперсионное соотношение:

$$\Omega^2 (\varepsilon + 1) + a \Omega + b = 0, \quad (12)$$

$$a = (\varepsilon + 1) \xi + C^2 + H - (\varepsilon - 1 + C)^2 / \varepsilon, \quad (13)$$

$$b = (C^2 + H) \xi - (2(\varepsilon - 1 + C)H + (\varepsilon - 1)(3C^2 - 2C) + C^4) / 2\varepsilon,$$

$$C = \sigma_0 / \varepsilon_0 E_{20}, \quad \Omega = 2\mu s / \varepsilon_0 E_{20}^2, \quad H = 2\mu \lambda / \varepsilon_0^2 E_{20}^2,$$

$$\xi = (\alpha^2 H^2 / 4 + y^2) / y, \quad \alpha = (\rho g T \varepsilon_0^2 / \mu^2 \lambda^2)^{1/2},$$

$$y = T k / \varepsilon_0 E_{20}^2. \quad (14)$$

Здесь  $H$  — электрический аналог числа Гартмана. В качестве параметра неустойчивости выберем  $\gamma = \alpha H = (4\rho g T)^{1/2} / \varepsilon E_{20}^2$ . Условиями устойчивости квадратного уравнения (12) являются  $a \geq 0, b \geq 0$ . Используя выражения (13) и (14), находим следующие условия устойчивости:

$$\gamma \geq \gamma_1 = \frac{\alpha(\varepsilon - 1)(\varepsilon - 1 + 2C - C^2)}{\varepsilon(\alpha(\varepsilon + 1) + 1)}, \quad (15)$$

$$\gamma \geq \gamma_2 = \frac{\sqrt{A^2 + 2\alpha\varepsilon((\varepsilon - 1)(3C^2 - 2C) + C^4) - A}}{2\varepsilon}, \quad (16)$$

где  $A = \alpha\varepsilon C^2 - \varepsilon + 1 - C$ .

В предельных случаях незаряженного идеального диэлектрика ( $C = 0, H \rightarrow 0, \alpha \rightarrow \infty$ ) и идеального проводника ( $C = 1, \alpha \rightarrow 0, H \rightarrow \infty$ ) уравнение (12) дает соответственно

$$\Omega = -\frac{\rho g + T k^2}{\varepsilon_0 E_{20}^2 k} + \frac{(\varepsilon - 1)^2}{\varepsilon(\varepsilon + 1)}, \quad (17)$$

$$\Omega = -\frac{\rho g + T k^2}{\varepsilon_0 E_{20}^2 k} + 1. \quad (18)$$

Периодические решения уравнений (17) и (18) существуют лишь в виде стоячих волн при  $\Omega = 0$ . В области  $\Omega < 0$  решения являются аperiодические затухающие функции.

Значения параметра  $\alpha \ll 1 (H \gg 1)$  соответствуют хорошо проводящим, а  $\alpha \gg 1 (H \ll 1)$  — плохо проводящим жидкостям. Момент возникновения неустойчивости определим как наименьшее значение напряженности поля, нарушающее любое из неравенств (15), (16). Как видно из (10), величина  $C$  меняется в диапазоне  $[0,1]$ . В зависимости от свойств жидкости и от способа повышения напряжения можно получить различные величины пороговых напряженностей, при которых нарушается устойчивость поверхности раздела.

Рассмотрим два случая возбуждения неустойчивости при внезапном повышении напряженности до пороговой величины значение  $C$  может пробегать все значения из диапазона  $[0,1]$ . Наименьшее значение напряженности определяется наибольшим значением  $\gamma$  из (15), (16)

$$\gamma_s = \max_C(\gamma_1, \gamma_2). \quad (19)$$

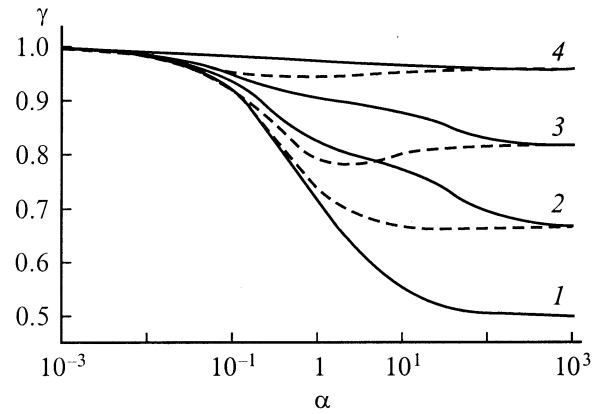
При постепенном повышении напряжения поверхностная плотность заряда поддерживается на уровне максимального значения  $C = 1$ . В этом случае имеем

$$\gamma_g = \max(\gamma_1(C = 1), \gamma_2(C = 1)). \quad (20)$$

Как видно из соотношений (9), (10), рассматриваемая электрогидродинамическая система имеет единственное равновесное состояние, соответствующее максимальному заряду поверхности раздела. Режим постепенного повышения напряжения поддерживает систему в состоянии, близком к равновесному. В случае внезапной подачи напряжения заряд может меняться от нуля до равновесного значения. Здесь предполагается, что процесс релаксации заряда протекает квазиравновесно. Это означает, что в неустойчивом положении имеет место быстрый гидродинамический отклик на всякое медленное изменение поверхностного заряда в любой момент времени. Используя характерные времена процесса, имеем условие квазиравновесности в виде  $s\tau > 1$ .

На рисунке приведена зависимость критической напряженности поля от проводимости в соответствии с выражениями (19), (20). Из результатов расчета видно, что у реальных жидкостей пороговое значение напряженности всегда выше критического поля проводника, определяемого (18). В то же время критическое поле идеального диэлектрика, определяемое (17), оказывается недостижимым даже очень плохими проводниками. Критерии (19), (20) определяют разные кривые возбуждения неустойчивости. Пороговая напряженность способа внезапной подачи напряжения всегда ниже напряженности, соответствующей медленному повышению потенциала, причем в первом случае неустойчивость наступает при  $C < 1$ .

Исследование возможности распространения волн проведем для случая медленного повышения потенциала



Зависимость пороговой напряженности от проводимости жидкости. Пунктир — зависимости для режима постепенного повышения напряженности.  $\varepsilon = 2$  (1), 5 (2), 10 (3), 40 (4).

( $C = 1$ ). Как видно из уравнения (12), условиями распространения таких волн являются условия  $a = 0, b > 0$

$$\frac{\rho g + Tk^2}{\varepsilon_0 E_{20}^2 k} = \frac{\varepsilon - 1 - H}{\varepsilon + 1}, \quad (21)$$

$$\frac{\rho g + Tk^2}{\varepsilon_0 E_{20}^2 k} > \frac{2H + 1}{2(H + 1)}. \quad (22)$$

Допустимые значения волновых чисел определяются уравнением (21), которое можно записать в виде

$$\left(k - \frac{\varepsilon - 1 - H}{\varepsilon + 1} \frac{\varepsilon_0 E_{20}^2}{2T}\right)^2 + \frac{\rho g}{T} - \left(\frac{\varepsilon - 1 - H}{\varepsilon + 1} \frac{\varepsilon_0 E_{20}^2}{2T}\right)^2 = 0. \quad (23)$$

Для того чтобы существовало решение этого уравнения, необходимо

$$\gamma \leq \frac{\alpha(\varepsilon - 1)}{1 + (\varepsilon + 1)\alpha}. \quad (24)$$

Сравнивая (24) с условием устойчивости (20), находим, что единственной возможностью распространения волн является знак равенства в (24). Тогда волновое число такой волны определяется из (23) и равно

$$k = \sqrt{\frac{\rho g}{T}}. \quad (25)$$

Это волновое число не зависит от поля и выражается только через капиллярную постоянную жидкости. Подставляя (25) в (22), находим условие распространения волн

$$H < \frac{\sqrt{3 + 2\varepsilon} - 3}{2}. \quad (26)$$

Из последнего соотношения видно, что генерация незатухающих волн возможна только для жидкостей с  $\varepsilon > 3$ .

## Эксперимент и обсуждение

Исследование дестабилизации поверхности жидкости в различных режимах подачи напряжения проводилось в цилиндрической стеклянной ячейке. Высота уровня жидкости регулировалась подвижным проводящим заземленным дном. Потенциал подавался на плоский электрод, расположенный в 0.5–2 см от поверхности жидкости с характерной напряженностью дестабилизации  $\sim 20$  кВ/см. Синусоидальные пульсации напряжения источника составляют 5% от среднего значения. Суммарная погрешность экспериментальных значений безразмерных величин не превышает 10%. В эксперименте измерялось напряжение, при котором с поверхности происходил выброс жидкости в виде струйки. В режиме постепенного роста потенциал повышался ступенчато со временем ожидания, соответствующим времени релаксации заряда  $\tau$ . При внезапной нагрузке мгновенно подавался фиксированный потенциал и система выдерживалась в течение промежутка времени  $\tau$ . Если выброса не происходило, опыт повторялся при большем потенциале после разрядки жидкости.

Наименьшее значение напряженности дестабилизации наблюдалось в режиме внезапной нагрузки. Напряженности режима постепенного повышения напряжения были выше на 5–20% для исследованных жидкостей, свойства которых представлены в табл. 1.

В качестве исследуемых жидкостей использованы: 1 — бензол, 2 — четыреххлористый углерод, 3 — трансформаторное масло, 4 — бутилацетат, 5 — дихлорэтан, 6 — диметилформамид. В табл. 2 приведены результаты измерений для этих жидкостей. Параметры  $\gamma$  и  $H$  вычислены при критической экспериментальной величине  $E_{20}$  режима внезапной нагрузки. В пределах погрешности значения  $\gamma(\alpha)$  из табл. 2 согласуются с расчетными данными рис. 1. Для позиций 4–6 из табл. 1 время релаксации заряда сопоставимо со временем установления напряжения источника. Поэтому дестабилизация этих жидкостей происходит в промежуточном режиме между постепенным и внезапным включением напряжения. Тем не менее неустойчивость возникает в поле, близком к порогу режима внезапного включения. Тот факт, что измеренная напряженность ниже порога, связан, вероятно, с тем, что система реагирует на амплитудное значение поля, которое выше измеряемой эффективной величины.

Жидкости из табл. 1 с низким значением  $\varepsilon \sim 2$  принято считать хорошими изоляторами. В то же время полученные результаты свидетельствуют о том, что их поведение значительно отличается от поведения идеального диэлектрика. В процессе измерения межфазная поверхность заряжается, и поэтому даже плохой проводник не достигает диэлектрического предела

$$\gamma = \frac{(\varepsilon - 1)^2}{\varepsilon(\varepsilon + 1)},$$

соответствующего дисперсионному соотношению (17). Дестабилизация поверхности таких жидкостей происходит при  $\gamma \sim 0.5$ .

Таблица 1.

Жидкость	$\rho \cdot 10^{-3}$ , g/m <sup>3</sup>	$T \cdot 10^3$ , N/m	$\varepsilon$ ,	$\lambda$ , $\Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$	$\mu \cdot 10^3$ , Pa · s
1	0.88	28.9	2.28	$10^{-16}$	0.65
2	1.59	27	2.24	$4 \cdot 10^{-16}$	0.97
3	0.88	29.8	2.25	$10^{-12}$	17.3
4	0.88	24.8	4.87	$5 \cdot 10^{-7}$	0.73
5	1.25	32.2	10.4	$3 \cdot 10^{-8}$	0.9
6	0.95	36.8	36.7	$1.8 \cdot 10^{-6}$	1.0

Таблица 2.

Жидкость	$E_{20} \cdot 10^{-6}$ , V/m	$\alpha$	$H$	$\gamma$
1	2.5	$2.2 \cdot 10^9$	$2.6 \cdot 10^{-10}$	0.57
2	2.9	$4.7 \cdot 10^8$	$1.2 \cdot 10^{-9}$	0.56
3	2.5	$8.3 \cdot 10^3$	$7.1 \cdot 10^{-5}$	0.58
4	1.9	0.36	2.6	0.92
5	2.2	6.6	0.14	0.93
6	2.0	$9.2 \cdot 10^{-2}$	12	1.1

Из приведенного списка жидкостей способностью к генерации незатухающих волн обладает только дихлорэтан. В эксперименте устойчивая двумерная система стоячих волн на поверхности образуется при напряженности поля, немного меньшей критической. Этот эффект сильно зависит от чистоты жидкости. Небольшие примеси, повышающие проводимость, приводят к нарушению неравенства (26), и волны исчезают. Хотя бутилацетат и диметилформамид имеют  $\varepsilon > 3$ , однако их параметры условию (26) не удовлетворяют и незатухающие волны не генерируются.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований и Администрации Калужской области (проект № 01-01-96002).

## Список литературы

- [1] Френкель Я.И. // ЖЭТФ. 1936. Т. 6. Вып. 4. С. 347.
- [2] Копейкина Э.К. // Магнитная гидродинам. 1970. № 3. С. 142–144.
- [3] Melcher J.R., Smith C.V. // Phys. Fluids. 1969. Vol. 12. N 4. P. 778–790.
- [4] Melcher J.R. Field-coupled Surface waves. Cambridge: MIT Press, 1963.
- [5] Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И., Ширяева С.О. // МЖГ. 1998. № 6. С. 116–123.
- [6] Melcher J.R., Taylor G.I. // Annual Review of Fluid Mechanics / Ed. W.R. Sears, M. Van Dyke. Vol. 1. California: Palo Alto, 1969. P. 111–146.
- [7] Шутов А.А., Алонцева Н.М., Шкадов В.Я. // Тр. регионального конкурса проектов в области естественных наук. Вып. 1. Калуга: Эйдос, 2000. С. 67–88 (ISBN 5-938810-006-2).
- [8] Тамм И.Е. Основы теории электричества, М.: Наука, 1976. 616 с.