

01;10

Ленточный пучок релятивистских электронов в плазменном канале, ограниченном проводящим кожухом

© А.П. Курышев, В.Д. Андреев

Балтийский государственный технический университет,
198005 Санкт-Петербург, Россия

(Поступило в Редакцию 5 октября 2000 г.)

Исследуется силовое взаимодействие пучка релятивистских электронов с системой "плазменный канал, окруженный высокопроводящим кожухом, обладающим плоской геометрией". Рассмотрен установившийся режим $\omega = ku$. Использована модель холодной электронной плазмы со столкновениями. Получены формулы для поперечной составляющей силы, действующей на пучковые электроны при произвольном отклонении РЭП от оси канала.

В литературе [1–10] обсуждается проблема, связанная с транспортировкой релятивистских электронных пучков (РЭП) по плазменным каналам, ограниченными средами с различной проводимостью: от вакуума до идеального проводника.

Как известно, силовое взаимодействие РЭП с системой плазменный канал–проводящий кожух связано с возбуждением в кожухе приповерхностных положительных зарядов и обратных токов, причем взаимодействие между зарядами и РЭП вызывает силу притяжения, а между токами и РЭП — взаимное их отталкивание. Поэтому ясно, что преимущественное действие одного или другого фактора приведет к эффекту суммарного притяжения или отталкивания. В вакуумном пределе превалирует зарядовое взаимодействие, что приводит к притяжению РЭП к проводнику. В случае наличия в канале транспортировки плазмы осуществляется частичное или полное экранирование заряда пучка. В результате токовое взаимодействие может привести к появлению силы, стабилизирующей отклонение РЭП от оси плазменного канала. Этот эффект может быть использован для поперечной стабилизации траектории пучка при его транспортировке через плазму [2–6], в проблеме формирования кольцевого РЭП [7,8] и т.д. В [9] анализируется эффект притяжения РЭП к слабоионизированному каналу в модели, когда свойства плазмы могут быть описаны в терминах постоянной проводимости σ . В работе [10] решена аналогичная рассматриваемой в настоящей работе задача в рамках цилиндрической геометрии плазменного канала относительно тонкого пучка электронов.

В настоящей работе исследуется силовое взаимодействие пучка релятивистских электронов с системой "плазменный канал, окруженный высокопроводящим кожухом, обладающим плоской геометрией". Для плазмы использована модель холодной электронной плазмы со столкновениями, для пучка — модель пучка конечной длительности, сохраняющего свои параметры неизменными. Рассмотрен установившийся режим.

Выражение для поперечной составляющей силы Лоренца, действующей на электроны пучка, движущиеся вдоль оси z со скоростью u , имеет вид

$$F = e(E_x - \beta B_y), \quad \beta = \frac{u}{c}. \quad (1)$$

Поставленная задача сводится к решению уравнений Максвелла с заданными линейными свойствами среды. Линейной модели холодной электронной плазмы со столкновениями соответствует, как известно, тензор диэлектрической проницаемости вида

$$\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \delta_{ij}\varepsilon(\omega) = \delta_{ij}\left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + i\nu)}\right), \quad (2)$$

где ω_p — ленгмюровская частота плазменных электронов, ν — частота столкновений плазменных электронов.

Воспользуемся уравнениями Максвелла

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{B} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_b, \quad \text{div } \mathbf{B} = 0, \\ \text{rot } \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \text{div } \mathbf{D} = 4\pi \rho_b \end{aligned} \quad (3)$$

с материальным уравнением, не учитывающим пространственную дисперсию

$$D_i(t, \mathbf{r}) = \int_{-\infty}^t dt' \varepsilon_{ij}(t - t', \mathbf{r}) E_j(t', \mathbf{r}). \quad (4)$$

Спроектируем уравнения (3) на оси декартовой системы координат, используя материальное уравнение (4). Для фурье–лаплас-образов по координате z и времени t компонент электромагнитного поля, определяющих поперечную составляющую силы Лоренца, действующую на электроны пучка, получим

$$\begin{aligned} F(\omega, k, x) &= -e \frac{ik}{\varkappa^2} (1 - \beta^2 \varepsilon) \frac{\partial E_z}{\partial x}, \\ \varkappa^2 &= k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(\omega). \end{aligned} \quad (5)$$

Рассмотрим случай установившегося режима. Для этого положим в (5) $\omega = ku$. В результате для искомого силы получим

$$F = F(k, x) = -e \frac{i}{k} \frac{\partial E_z}{\partial x}. \quad (6)$$

Рассмотрение начнем со случая идеально проводящего кожуха.

Идеально проводящий кожух

Из уравнения Максвелла нетрудно получить в условиях рассматриваемой геометрии уравнение для E_z -компоненты напряженности электрического поля в каждой области (рис. 1)

$$\mathcal{L}E_z \equiv \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} - \varkappa^2 E_z = H[\eta(x-a+h) - \eta(x-a-h)],$$

$$H = 4\pi \varkappa^2 en_b \frac{i}{k\varepsilon(ku)} j_z(k, x), \quad (7)$$

$\eta(x)$ — ступенчатая функция Хевисайда; $en_b u j_z(k, x)$ — фурье-образ по координате z плотности тока пучка; $2R$ — ширина плазменного канала.

Распределение плотности тока пучка по поперечной координате x зададим для определенности однородным. Граничные условия для уравнения (7) имеют вид

$$E_z(x = \pm R) = 0, \quad \{E_z\}_{x=a\pm h}, \quad (8)$$

$$\{B_y\}_{x=a\pm h} = 0 \Leftrightarrow \left\{ \frac{\partial E_z}{\partial x} \right\}_{x=a\pm h} = 0,$$

$$\{f\} = f(x = a \pm h + 0) - f(x = a \pm h - 0). \quad (9)$$

Решение задачи (7)–(9) может быть легко построено и имеет следующий вид:

$$E_z^I = -\frac{2H}{\varkappa^2} \frac{\text{sh}(\varkappa h) \text{sh}(\varkappa(R-a))}{\text{sh}(2\varkappa R)} \text{sh}(\varkappa(R+x)),$$

$$E_z^{II} = \frac{H}{\varkappa^2} \left[\frac{\text{ch}(\varkappa a) \text{ch}(\varkappa(R-h))}{\text{ch}(\varkappa R)} \text{ch}(\varkappa x) - \frac{\text{sh}(\varkappa a) \text{sh}(\varkappa(R-h))}{\text{sh}(\varkappa R)} \text{sh}(\varkappa x) - 1 \right],$$

$$E_z^{III} = -\frac{2H}{\varkappa^2} \frac{\text{sh}(\varkappa h) \text{sh}(\varkappa(R+a))}{\text{sh}(2\varkappa R)} \text{sh}(\varkappa(R-x)),$$

$\text{Re} \varkappa > 0.$

Дифференцируя E_z по x , получим выражение для фурье-компоненты искомой силы, действующей на осевые электроны пучка

$$F(x=a) = -\frac{ei}{k} \frac{\partial E_z}{\partial x} \Big|_{x=a}$$

$$= -\frac{4\pi e^2 n_b}{R} \frac{i}{k\varepsilon(ku)} \frac{iR\varkappa \text{sh}(2\varkappa a) \text{sh}(h\varkappa)}{k \text{sh}(2\varkappa R)} \tilde{j}(k). \quad (10)$$

Для определения силы в физическом пространстве необходимо осуществить обратное преобразование по Фурье по продольной координате \hat{z} выражения (10).

В бесстолкновительном случае ($\nu = 0$) в пределе сильного релятивизма $\gamma \rightarrow \infty$ выражение для силы примет следующий вид:

$$F = -2\pi e^2 n_b \lambda \frac{\text{sh} \frac{2a}{\lambda} \text{sh} \frac{h}{\lambda}}{\text{sh} \frac{2R}{\lambda}} \left[1 - \cos \frac{\hat{z}}{\lambda} \right].$$

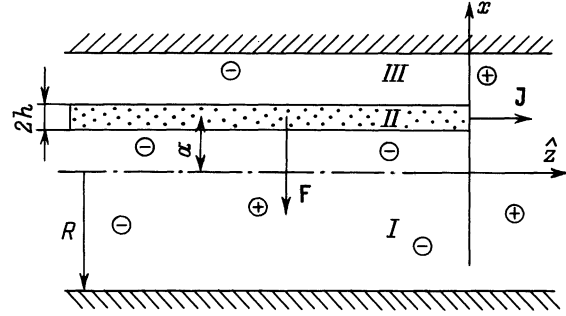


Рис. 1.

Учет конечности релятивистского фактора γ и столкновений могут быть осуществлены аналогично работе [10]. В этом случае выражение для искомой силы (10) может быть представлено в следующем виде:

$$F(k) = -\frac{4\pi e^2 n_b}{R} G_1(k) G_2(k) j(k), \quad G_1(k) = \frac{i}{k\varepsilon(ku)},$$

$$G_2 = i \frac{R\varkappa \text{sh}(2\varkappa a) \text{sh}(h\varkappa)}{k \text{sh}(2\varkappa R)}. \quad (11)$$

Для определения силы в физическом пространстве вычислим сначала оригиналы функций G_1 и G_2 , а затем последовательно две свертки по Фурье. Оригинал функции $G_1(k)$ в случае $\nu < 2\omega_p$ определяется вкладом двух полюсов

$$k_{1,2} = \pm k_0 - i\alpha, \quad k_0 = \sqrt{\frac{1}{\lambda^2 \beta^2} - \alpha^2},$$

$$\alpha = \frac{\nu}{2u}, \quad \lambda = \frac{c}{\omega_p},$$

лежащих в нижней полуплоскости комплексной плоскости k и определяющих возбуждение электронных ленгмюровских колебаний (рис. 2)

$$G_1(k) - G_1(\hat{z}) = \frac{1}{2\pi} \int G_1(k) \exp(ik\hat{z}) dk$$

$$= e^{\alpha \hat{z}} \left[\cos k_0 \hat{z} - \frac{\alpha}{k_0} \sin k_0 \hat{z} \right] \eta(-\hat{z}).$$

Оригинал функции $G_2(k)$ определяется вкладом нулей функции

$$\text{sh} 2\varkappa R = 0 \Leftrightarrow e^{4\varkappa R} = 1 \Rightarrow R\varkappa_n = i j_n \Leftrightarrow (R\varkappa_n)^2 = -j_n^2,$$

$$j_n = \frac{\pi n}{2} \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (12)$$

Уравнение (12), определяющее спектр задачи, аналогично уравнению для цилиндрической геометрии транспортировки РЭП [10] и отличается лишь определением чисел j_n . Воспользуемся построенным в [10] решением уравнения (12), которое может быть сведено к кубическому уравнению. Уравнение (12) имеет три серии

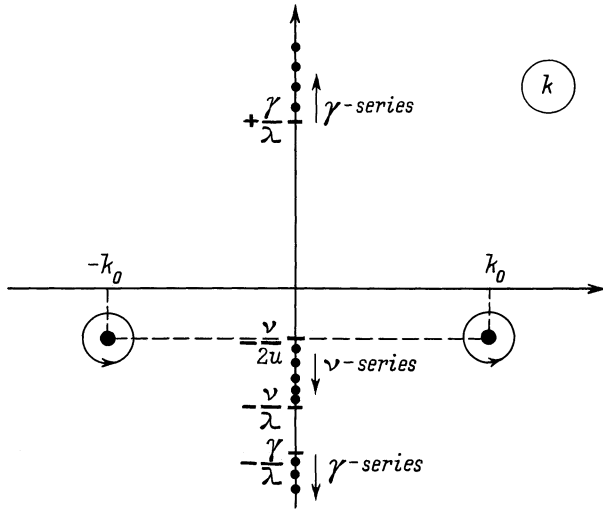


Рис. 2.

полюсов: одну столкновительную (ν -серия) $k_n^{(1)} = -iy_n^{(1)}$ и две релятивистские (γ -серии) $k_n^{(2,3)} = -iy_n^{(2,3)}$ (рис. 2). Столкновительная серия лежит в нижней полуплоскости на мнимой оси на отрезке $(0, -i\nu/u)$ и определяется формулой

$$y_n^{(1)} = \frac{\nu}{u} \frac{1}{1+d_n^2} \left[1 - \frac{\lambda^2}{\gamma^2} \left(\frac{\nu}{u} \right)^2 \frac{d_n^4}{(1+d_n^2)^3} \right], \quad d_n = \frac{R}{\lambda} \frac{1}{j_n}. \quad (13)$$

Первая релятивистская серия $y_n^{(2)}$ расположена в нижней полуплоскости на мнимой оси в интервале $(-i\gamma/\lambda, -i\infty)$, вторая серия $y_n^{(3)}$ лежит в верхней полуплоскости на мнимой оси в интервале $(i\gamma/\lambda, i\infty)$. Релятивистские серии определяются формулами

$$y_n^{(2,3)} = \pm \frac{\gamma}{\lambda} \frac{\sqrt{1+d_n^2}}{d_n} \left[1 - \frac{1}{2} \frac{\nu}{u} \frac{\lambda}{\gamma} \frac{d_n(d_n^2+2)}{(1+d_n^2)^{3/2}} \right]. \quad (14)$$

Как следует из формул (13), (14), при "выключении" столкновений исчезает ν -серия, а в ультрарелятивистском пределе ($\gamma \rightarrow \infty$) исчезают γ -серии. В случае $\nu = 0$ и $\gamma \rightarrow \infty$ приходим к рассмотренному выше решению.

Столкновительная ν -серия и первая γ -серия определяют вклады в оригинал $G_2(\hat{z})$ в области пучка $\hat{z} < 0$, вторая γ -серия — вклад в области перед пучком $\hat{z} > 0$. Особая точка $k = 0$, как нетрудно заметить, является устранимой особой точкой и вклада в $G_2(\hat{z})$ не дает. Для $G_2(\hat{z})$ последовательно получаем

$$G_2(\hat{z}) = \sum_{l=1}^3 \sum_{n=1}^{\infty} C_{nl} e^{y_n^{(l)} \hat{z}} f_l(\hat{z}),$$

$$C_{nl} = \frac{(-1)^n j_n^2}{R^2 y_n^{(l)}} \frac{\sin(j_n \frac{2a}{R}) \sin(j_n \frac{h}{R})}{\left[\frac{2y_n^{(l)}}{\gamma^2} + \frac{1}{\lambda^2} \frac{\nu}{u} \frac{1}{(y_n^{(l)} - \nu/u)^2} \right]},$$

$$f_{1,2}(\hat{z}) = \eta(-\hat{z}), \quad f_3(\hat{z}) = -\eta(\hat{z}).$$

Вычисляя двойную свертку по Фурье для искомой силы в случае $\nu \neq 0$, γ конечно, получим

$$F = -\frac{4\pi e^2 n_b}{R} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{C_{n1}}{y_n^{(1)}} - \frac{C_{n2}}{y_n^{(2)}} + \frac{C_{n3}}{y_n^{(3)}} \right) \times \frac{k_0^2 - \alpha^2}{\alpha^2 + k_0^2} \frac{1}{k_0} e^{\alpha \hat{z}} \sin k_0 \hat{z} + \sum_{l=1}^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{nl}}{y_n^{(l)}} \frac{1}{(-y_n^{(l)} + \alpha)^2 + k_0^2} \times \left[y_n^{(l)} e^{y_n^{(l)} \hat{z}} + e^{\alpha \hat{z}} \left[-y_n^{(l)} \cos k_0 \hat{z} + \left(k_0 - \frac{\alpha}{k_0} (-y_n^{(l)} + \alpha) \right) \sin k_0 \hat{z} \right] \right] - \frac{C_{n3}}{y_n^{(3)}} \frac{1}{(-y_n^{(3)} + \alpha)^2 + k_0^2} \left[y_n^{(3)} e^{-y_n^{(3)}(\hat{z} + u\tau)} + e^{\alpha \hat{z}} \left[-y_n^{(3)} \cos k_0 \hat{z} + \left(k_0 - \frac{\alpha}{k_0} (-y_n^{(3)} + \alpha) \right) \sin k_0 \hat{z} \right] \right] \right\}.$$

Отметим, что вклад релятивистских серий в силу F пропорционален $1/\gamma$.

Плазменный кожух с конечной проводимостью

Рассмотрим случай, когда проводящий кожух, ограничивающий плазменный канал транспортировки РЭП, имеет конечную проводимость. С такой ситуацией мы сталкиваемся, когда "кожух" представляет собой металлический проводник с конечной проводимостью σ либо проводящую среду (плазму). Среду в плазменном канале будем обозначать индексом 1, среду в "кожухе" — индексом 2. В этом случае для нахождения силы следует решить уравнение (7) для E_z -компоненты напряженности электрического поля с неоднородными граничными условиями. Граничные условия представляют собой условия непрерывности z - и y -компонент электромагнитного поля при переходе через границу раздела сред

$$\{E_z\}_{x=\pm R} = 0, \quad \{B_y\} \equiv \left\{ \frac{\varepsilon}{\mathcal{K}^2} \frac{\partial E_z}{\partial x} \right\}_{x=\pm R} = 0. \quad (15)$$

Задача, как известно, в силу принципа суперпозиции может быть разделена на две

$$E_z = E_z^{(1)} + E_z^{(2)},$$

$E_z^{(1)}$ представляет решение неоднородного уравнения (7) с однородными граничными условиями, т. е. построенное выше решение, $E_z^{(2)}$ — решение однородного уравнения соответствующего уравнению (7)

$$\mathcal{L}E_z^{(2)} = 0$$

с неоднородными граничными условиями (15).

Решение задачи (7), (15) может быть построено известным образом и для случая "кожуха" с высокой проводимостью имеет в области плазменного канала следующий вид:

$$E_z^{(2)} = -8\pi e n_b \frac{i\kappa_2}{k\kappa_1 \varepsilon_2} \frac{\text{sh } \kappa_1 h}{\text{sh}^2 2\kappa_1 R} [\text{sh } \kappa_1 (R+x) \text{sh } \kappa_1 (R+a) + \text{sh } \kappa_1 (R-x) \text{sh } \kappa_1 (R-a)] \tilde{j}(k).$$

Для составляющей $F_2(k, x)$ — силы, действующей как на электроны пучка, так и на плазменные электроны, получим

$$F_2(k, x) = -8\pi e^2 n_b \frac{\kappa_2}{k^2 \varepsilon_2} \frac{\text{sh } \kappa_1 h}{\text{sh}^2 2\kappa_1 R} [\text{ch } \kappa_1 (R+x) \times \text{sh } \kappa_1 (R+a) - \text{ch } \kappa_1 (R-x) \text{sh } \kappa_1 (R-a)] \tilde{j}(k).$$

Для составляющей $F_2(k, a)$ — искомой силы, действующей на осевые электроны РЭП, получим

$$F_2(k, a) = -\frac{8\pi e^2 n_b}{R} R \frac{\text{sh}(\kappa_1 h) \text{sh}(2\kappa_1 a) \text{ch}(2\kappa_1 R)}{\text{sh}^2(2\kappa_1 R)} \frac{\kappa_2}{k^2 \varepsilon_2} \tilde{j}(k) = -\frac{8\pi e^2 n_b}{R} G_1(k) G_2(k) \tilde{j}(k). \quad (16)$$

Нетрудно заметить, что выражение для составляющей силы F_2 мультипликативно относительно свойств плазменного канала и "кожуха". Это позволяет независимо рассматривать различные модели сред 1–2, свойства которых определяются оригиналами по фурье-функций G_i . При известных оригиналах сила может быть вычислена путем последовательного "сворачивания" их по Фурье.

Рассмотрим сначала модель бесстолкновительной плазмы в плазменном канале ($\nu_1 \rightarrow 0$) в ультрарелятивистском пределе $\gamma \rightarrow \infty$. В этом случае из формулы (16) следует

$$F_2(k, a) = -\frac{8\pi e^2 n_b}{R} G_1(\infty) G_2(k) \tilde{j}(k),$$

$$G_1(\infty) = \frac{\text{sh } \frac{h}{\lambda_1} \text{sh } \frac{2a}{\lambda_1} \text{ch } \frac{2R}{\lambda_1}}{\text{sh}^2 \frac{2R}{\lambda_1}}.$$

При вычислении обратного преобразования Фурье по координате z рассмотрим функцию $G_2(k) = \kappa_2 / (k^2 \varepsilon_2)$.

Условие убывания физического поля на бесконечности

$$\text{Re } \kappa_2 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \text{Im } \kappa_2^2 = 0, \\ \text{Re } \kappa_2^2 < 0 \end{cases}$$

приводит к появлению на мнимой оси разреза Γ : $(0, -\nu_2)$ (рис. 3). При этом

$$\kappa_2 \Big|_{\Gamma} = \frac{1}{\lambda_2^2} \frac{v}{v + \bar{\nu}_2} < 0 \Leftrightarrow \kappa_2 \Big|_{\Gamma_{\mp}} = \pm \frac{i}{\lambda_2^2} \sqrt{-\frac{v}{v + \bar{\nu}_2}}.$$

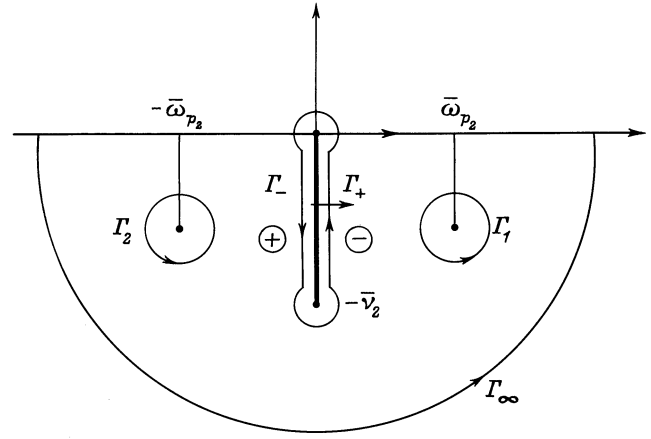


Рис. 3.

Функция $G_2(k)$ (в случае $\omega_{p2} > \nu_2/2$), таким образом, имеет в нижней полуплоскости $k = u + iv$ два полюса

$$k_{1,2} = -i\alpha_2 \pm k_0^{(2)}, \quad k_0^{(2)} = \sqrt{\frac{1}{\lambda_2^2} - \alpha_2^2},$$

$$\alpha_2 = \frac{\bar{\nu}_2}{2}, \quad \bar{\nu}_i = \frac{\nu_i}{c}$$

и разрез Γ (рис. 3). Учитывая эти особенности для $G_2(\hat{z})$, получим

$$G_2 = -e^{\alpha_2 \hat{z}} (\tilde{A} \cos k_0^{(2)} \hat{z} + \tilde{B} \sin k_0^{(2)} \hat{z}) \eta(-\hat{z}) - \frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_0^{\lambda_2} \sqrt{\frac{\tilde{\lambda}_2 - x}{x}} \frac{e^{x\hat{z}/\lambda_2}}{x^2 - \tilde{\lambda}_2 x + 1} dx \eta(-\hat{z}),$$

$$\tilde{A} = a\bar{\nu}_2 \lambda_2^2 - \frac{b}{k_0^{(2)}} (1 - \alpha_2 \bar{\nu}_2 \lambda_2^2), \quad \tilde{B} = \frac{a}{k_0^{(2)}} (1 - \alpha_2 \bar{\nu}_2 \lambda_2^2),$$

$$\kappa_2^2(k_{1,2}) = \left(\frac{1}{\lambda_2^2} - 2\alpha_2^2 \right) \mp ik_0^{(2)} 2\alpha_2 = \rho^2 e^{\mp \Phi i}$$

$$\Rightarrow \kappa_2(k_{1,2}) = \rho e^{\mp \Phi i} = a \mp ib,$$

$$\Phi = \frac{1}{2} \text{arctg} \frac{2k_0^{(2)} \alpha_2}{\lambda_2^{-2} - 2\alpha_2^2},$$

$$\tilde{\lambda}_2 = \frac{\lambda_2}{z_{\nu_2}}, \quad z_{\nu_2} = \frac{c}{\nu_2}, \quad \tilde{\lambda}_2 < \frac{1}{2}.$$

Вычисляя свертки по Фурье от функций $G_1(\hat{z})$ и $\tilde{j}(\hat{z})$ аналогично тому, как это было проделано в первом разделе, получим в условиях

$$\nu_1 = 0, \quad \gamma \rightarrow \infty, \quad \frac{\nu_2}{2} < \omega_{p2}$$

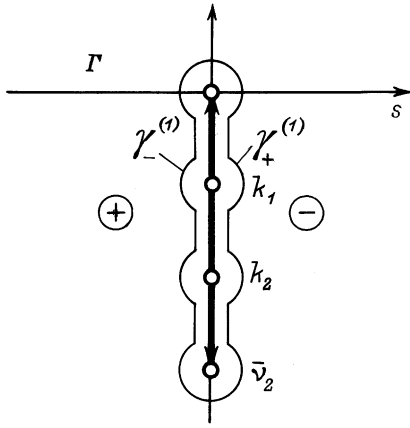


Рис. 4.

следующее выражение для составляющей F_2 искомой силы:

$$F_2(\hat{z}, a) = 8\pi e^2 n_b \lambda_2 \frac{G_1(\infty)}{R} \left\{ \frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_0^{\lambda_2} \frac{1}{x} \sqrt{\frac{\lambda_2 - x}{x}} \times \frac{1 - e^{x\hat{z}/\lambda_2}}{x^2 - \lambda_2 x + 1} dx + \lambda_2 [(\alpha_2 \tilde{A} - k_0^{(2)} \tilde{B}) - e^{\alpha_2 \hat{z}} ((\alpha_2 \tilde{A} - k_0^{(2)} \tilde{B}) \cos k_0^{(2)} \hat{z} + (k_0^{(2)} \tilde{A} + \alpha_2 \tilde{B}) \sin k_0^{(2)} \hat{z})] \right\}. \quad (17)$$

Выражение для вклада F_2 в силу F , действующую на РЭП в бесстолкновительном случае, следует из формулы (17)

$$F_2(x = a) = 8\pi e^2 n_b \lambda_2 \left[1 - \cos \frac{\hat{z}}{\lambda_2} \right] \frac{G_1(\infty)}{R}.$$

В случае $\gamma \rightarrow \infty$, $\nu_1 = 0$, $\omega_{p_2} < \nu_2/2$, когда колебательный процесс в плазменном кожухе не возбуждается, полюсы функции $G_1(k)$ — корни функции ε_2 перемещаются на разрез Γ (рис. 4). Вклад от полюсов оказывается равным нулю. В результате остается вклад только от разреза Γ . При этом интегрирование по разрезу следует понимать в смысле главного значения по Коши. Выражение для $F_2(\hat{z}, \nu_1 = 0)$ определяется первым слагаемым формулы (17).

Рассмотрим случай σ -модели, когда свойства среды в кожухе определены законом Ома

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}.$$

Условия убывания физического поля на бесконечности приводят к появлению полубесконечного разреза на мнимой оси (рис. 5). Функция $G_2(k)$ на разрезе Γ определяется формулой

$$G_2(k) \Big|_{\Gamma} = \frac{\varkappa_2}{k^2 \varepsilon_2} \Big|_{\Gamma} = G_2(iv) \Big|_{\Gamma_{\mp}} = \pm i \frac{\sqrt{-v}}{v(v + \frac{4\pi\sigma}{c})}.$$

Последовательно вычисляя оригинал $G_2(\hat{z}) - G_2(k)$ и свертку по Фурье с током пучка, для составляющей $F_2(\hat{z}, \nu_1 = 0)$ получим

$$F_2(\hat{z}, a) \equiv F_2(\hat{z}, \nu_1 = 0) = \frac{8\pi e^2 n_b}{R} G_1(\infty) \frac{z_m}{\pi} \mathcal{P} \int_0^{\infty} \frac{dx \sqrt{x}}{x^2(1-x)} (1 - e^{x\hat{z}/z_m}),$$

где $z_m = \nu_m/c$, $\nu_m = c^2/(4\pi\sigma)$ — магнитная вязкость.

Рассмотрим случай $\gamma \rightarrow \infty$, $\nu_1 \neq 0$. В этом случае достаточно вычислить оригинал $G_2(\hat{z})$ функции $G_2(k)$, а затем свернуть его по Фурье с полученным при $\nu_1 = 0$ результатом. При этом составляющая искомой силы F_2 будет определяться формулой

$$F_2(\hat{z}, a) = (F_2(\hat{z}, \nu_1 = 0) G_1(\hat{z}) / G_1(\infty)), \quad (18)$$

где $F_2(\hat{z}, \nu_1 = 0)$ определены выше.

При вычислении оригинала $G_1(\hat{z})$ следует учитывать свойства функции $G_1(k, \nu_1)$ как в окрестности полюсов столкновительной серии $k_n^{(1)} = -iy_n^{(1)}$, так и на бесконечности. Нетрудно выделить особенности функции $G_1(k, \nu_1)$ в полюсах $k_n^{(1)}$, т.е. при $k \rightarrow k_n^{(1)}$, которые являются полюсами второго порядка

$$G_1(k, \nu_1) \sim \frac{f(k_n^{(1)})}{(k - k_n^{(1)})^2},$$

где

$$f(k_n^{(1)}) = (-1)^{n+1} \left(\frac{\nu_1}{c} \right)^2 \frac{R}{j_n^2} \times \sin \left(j_n \frac{2a}{R} \right) \sin \left(j_n \frac{h}{R} \right) \frac{1}{(1 + d_n^2)^2}.$$

На бесконечности функция $G_1(k, \nu_1)$ стремится к отличной от нуля константе.

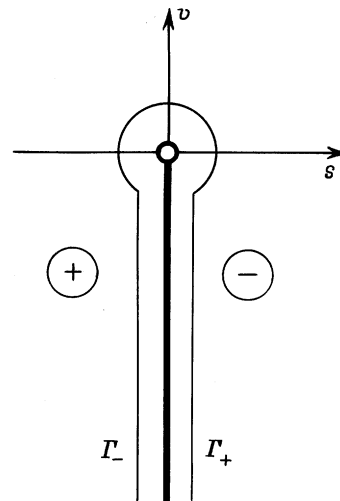


Рис. 5.

Вклад от полюсов 2-го порядка определяем по известной формуле Коши

$$G_1(\hat{z}, \nu_1) = \sum_n \frac{1}{2\pi} \int_{C_n} \frac{f(k_n^{(1)}) e^{ik\hat{z}}}{(k - k_n^{(1)})^2} dk$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} f(k_n^{(1)}) \hat{z} e^{y_n^{(1)} \hat{z}} \eta(-\hat{z}). \quad (19)$$

Таким образом, оригинал $G_1(\hat{z})$ при $\nu_1 \neq 0$ имеет вид

$$G_1(\hat{z}) = G_1(\infty) \delta(\hat{z}) + G_1(\hat{z}, \nu_1). \quad (20)$$

Нетрудно заметить, что при вычислении составляющей силы F_2 первое слагаемое из (20) даст полученный при $\nu_1 = 0$ результат и выражение для F_2 будет содержать два слагаемых

$$F_2(\hat{z}, a) = F_2(\hat{z}, \nu_1 = 0) + F_2(\hat{z}, \nu_1). \quad (21)$$

Далее, меняя в формуле (18) выражение для $F_2(\hat{z}, \nu_1 = 0)$ для различных физических моделей среды в кожухе и вычисляя свертки по Фурье, получим вклады от столкновений в плазменном канале (среда — 1) $F_2(\hat{z}, \nu_1)$ в искомую силу (21). Для случая $\gamma \rightarrow \infty$, $\nu_1 \neq 0$, $\omega_{p2} > \nu_2/2$ получим

$$F_2(\hat{z}, \nu_1) = \frac{8\pi e^2 n_b}{R} \sum_{n=1}^{\infty} f(k_n^{(1)})$$

$$\times \left\{ \frac{\lambda_2^3}{\pi} \mathcal{P} \int_0^{\tilde{\lambda}_2} \left[\frac{e^{y_n^{(1)} \hat{z}}}{x - y_n^{(1)} \lambda_2} \left(\frac{e^{(x - y_n^{(1)} \lambda_2) \hat{z}}}{x - y_n^{(1)} \lambda_2} - \hat{z} \right) \right. \right.$$

$$+ \left. \frac{1}{y_n^{(1)} \lambda_2} \left(\frac{e^{y_n^{(1)} \hat{z}} - 1}{y_n^{(1)} \lambda_2} - \frac{\hat{z}}{\lambda_2} e^{y_n^{(1)} \hat{z}} \right) \right] \frac{1}{x} \sqrt{\frac{\tilde{\lambda}_2 - x}{x}} dx$$

$$\times \frac{dx}{x^2 - \tilde{\lambda}_2 x + 1} + \lambda_2^2 \left\{ \frac{C}{y_n^{(1)}} \left[e^{y_n^{(1)} \hat{z}} \left(-\hat{z} + \frac{1}{y_n^{(1)}} \right) - \frac{1}{y_n^{(1)}} \right] \right.$$

$$+ \frac{1}{(\alpha_2 - y_n^{(1)})^2 + k_0^{(2)2}} \left[e^{y_n^{(1)} \hat{z}} \left[(k_0^{(2)} D - (\alpha_2 - y_n^{(1)}) C) \hat{z} \right. \right.$$

$$- \left. \frac{1}{(\alpha_2 - y_n^{(1)})^2 + k_0^{(2)2}} (2D(\alpha_2 - y_n^{(1)}) k_0^{(2)} + C((\alpha_2 - y_n^{(1)})^2 + k_0^{(2)2})) \right]$$

$$+ \left. \frac{e^{\alpha_2 \hat{z}}}{(\alpha_2 - y_n^{(1)})^2 + k_0^{(2)2}} \left[(2D(\alpha_2 - y_n^{(1)}) k_0^{(2)} + C((\alpha_2 - y_n^{(1)})^2 + k_0^{(2)2})) \cos k_0^{(2)} \hat{z} \right. \right.$$

$$+ \left. \left(D((\alpha_2 - y_n^{(1)})^2 - k_0^{(2)2}) - 2C(\alpha_2 - y_n^{(1)}) k_0^{(2)} \right) \sin k_0^{(2)} \hat{z} \right] \left. \right\}, \quad (22)$$

где $C = \alpha_2 \tilde{A} - k_0^{(2)} \tilde{B}$; $D = k_0^{(2)} \tilde{A} + \alpha_2 \tilde{B}$; \tilde{A} , \tilde{B} определены выше.

В случае модели среды с номером 2 без столкновений ($\nu_2 = 0$) из (22) получим

$$F_2(\hat{z}, \nu_1) = \frac{8\pi e^2 n_b \lambda_2^3}{R} \sum_{n=1}^{\infty} f(k_n^{(1)}) \left\{ -\frac{1}{y_n^{(1)} \lambda_2} \right.$$

$$\times \left[e^{y_n^{(1)} \hat{z}} \left(-\frac{\hat{z}}{\lambda_2} + \frac{1}{y_n^{(1)} \lambda_2} \right) - \frac{1}{y_n^{(1)} \lambda_2} \right]$$

$$+ \frac{1}{(y_n^{(1)} \lambda_2)^2 + 1} \left\{ e^{y_n^{(1)} \hat{z}} \left[-y_n^{(1)} \hat{z} + \frac{(y_n^{(1)} \lambda_2)^2 - 1}{(y_n^{(1)} \lambda_2)^2 + 1} \right] \right.$$

$$\left. \left. - \frac{1}{(y_n^{(1)} \lambda_2)^2 + 1} \left[((y_n^{(1)} \lambda_2)^2 - 1) \cos \frac{\hat{z}}{\lambda_2} + 2y_n^{(1)} \lambda_2 \sin \frac{\hat{z}}{\lambda_2} \right] \right\} \right\}.$$

В случае $\gamma \rightarrow \infty$, $\nu_1 \neq 0$, $\omega_{p2} < \nu_2/2$ получим

$$F_2(\hat{z}, \nu_1) = \frac{8\pi e^2 n_b}{R} \sum_{n=1}^{\infty} f(k_n^{(1)}) \frac{\lambda_2^3}{\pi}$$

$$\times \mathcal{P} \int_0^{\tilde{\lambda}_2} \left[\frac{e^{y_n^{(1)} \hat{z}}}{x - y_n^{(1)} z_m} \left(\frac{e^{(x - y_n^{(1)} z_m) \hat{z}}}{x - y_n^{(1)} z_m} - \hat{z} \right) \right.$$

$$+ \left. \frac{1}{y_n^{(1)} \lambda_2} \left(\frac{e^{y_n^{(1)} \hat{z}} - 1}{y_n^{(1)} \lambda_2} - \frac{\hat{z}}{\lambda_2} e^{y_n^{(1)} \hat{z}} \right) \right] \frac{1}{x} \sqrt{\frac{\tilde{\lambda}_2 - x}{x}} \frac{dx}{x^2 - \tilde{\lambda}_2 x + 1}.$$

В случае σ -модели при $\gamma \rightarrow \infty$, $\nu_1 \neq 0$ получим

$$F_2(\hat{z}, \nu_1) = \frac{8\pi e^2 n_b}{R} \sum_{n=1}^{\infty} f(k_n^{(1)}) \frac{\tilde{z}_m^3}{\pi}$$

$$\times \mathcal{P} \int_0^{\infty} \left[\frac{e^{y_n^{(1)} \hat{z}}}{x - y_n^{(1)} z_m} \left(\frac{e^{(x - y_n^{(1)} z_m) \hat{z}}}{x - y_n^{(1)} z_m} - \hat{z} \right) \right.$$

$$+ \left. \frac{1}{y_n^{(1)} z_m} \left(\frac{e^{y_n^{(1)} \hat{z}} - 1}{y_n^{(1)} z_m} - \frac{\hat{z}}{z_m} e^{y_n^{(1)} \hat{z}} \right) \right] \frac{\sqrt{x} dx}{x^2(1-x)}.$$

Далее будем вычислять оригиналы функции $G_2(k)$, определяющей свойства проводящего "кожуха" для разных моделей "кожуха".

Учет конечности релятивистского фактора может быть легко осуществлен в рамках σ -модели для кожуха. Требование убывания физического поля на бесконечности приводит к появлению на мнимой оси двух разрезов Γ_i (рис. 6)

$$\Gamma_i : \begin{cases} s = 0, \\ v > v_0 = \frac{\beta \gamma^2}{z_m}, \\ v < 0. \end{cases}$$

Функция

$$G_2(k) = \frac{\varkappa_2}{k^2 \varepsilon_2} = \frac{\varkappa_2}{k \left(k + i \frac{1}{\beta z_m} \right)}$$

имеет, кроме того, полюс первого порядка

$$k_2 = -i \frac{1}{\beta z_m} = -iv_2.$$

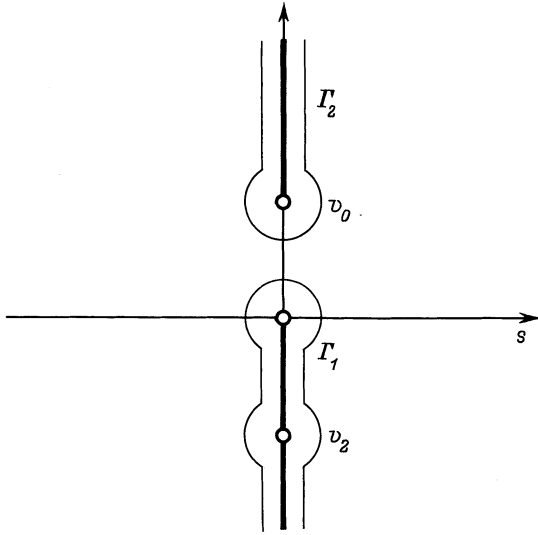


Рис. 6.

Нетрудно показать, что полюс k_2 не дает вклада при интегрировании в связи с тем, что функция \varkappa_2 меняет знак при переходе с правого берега разреза на левый. Кроме того, точка $k_1 = 0$ является устранимой особой точкой. В связи с этим опять приходим к интегралу в смысле главного значения по Коши. Для оригинала $G_2(\hat{z})$ функции $G_2(k)$ получим

$$G_2(\hat{z}) = -\frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x \left(\frac{x}{\gamma^2} + \beta \right)}}{(\beta^{-1} - x)x} e^{x\hat{z}/z_m} dx \eta(-\hat{z}) + \frac{1}{\pi} \int_{\beta\gamma^2}^{\infty} \frac{\sqrt{x \left(-\frac{x}{\gamma^2} + \beta \right)}}{(\beta^{-1} + x)x} e^{-x\hat{z}/z_m} dx \eta(\hat{z}). \quad (23)$$

Первое слагаемое в (23) определяет вклад разреза Γ_1 , второе — Γ_2 (рис. 6). При $\gamma \rightarrow \infty$ второе слагаемое, определяющее возмущение перед фронтом пучка электронов, исчезает. В случае конечных γ в силу свойства мультипликативности составляющей силы F_2 (16) определим сначала оригинал функции $G_1(k)$. Функция $G_1(k)$ имеет особенности типа полюсов второго порядка, определяемых нулями ее знаменателя. Это найденные нами в предыдущем разделе ν -серия и две γ -серии. Вклад от полюсов 2-го порядка в этом случае определяется так же, как и при получении формулы (19). Последовательно получаем

$$G_1(k) - G_1(\hat{z}) = \sum_{l=1}^3 \sum_{n=1}^{\infty} f(k_n^{(l)}) \hat{z} e^{y_n^{(l)} \hat{z}} f_l(\hat{z}),$$

$$f(k_n^{(l)}) = (-1)^{n+1} \frac{j_n^2}{R^3} \frac{\sin(j_n \frac{2a}{R}) \sin(j_n \frac{h}{R})}{\left[\frac{2y_n^{(l)}}{\gamma^2} + \frac{1}{\lambda_1^2} \frac{\nu_1}{u} \frac{1}{(y_n^{(l)} - \nu_1)^2} \right]^2}.$$

Выражение составляющей силы $F_2(\hat{z}, a)$ определяется двойной сверткой по Фурье. После несложных, но трудоемких вычислений получим формулу для составляющей силы F_2 для σ -модели кожуха, конечного γ и учета столкновений в плазменном канале

$$F_2(\hat{z}, a) = -\frac{8\pi e^2 n_b z_m^3}{R} \left\{ \sum_n f_n^{(3)} e^{y_n^{(3)}(\hat{z} + u\tau)} \times \mathcal{P} \int_0^{\infty} dx \frac{\sqrt{x \left(\frac{x}{\gamma^2} + \beta \right)}}{(\beta^{-1} - x)x^2} \frac{(y_n^{(3)} z_m - x) \frac{\hat{z} + u\tau}{z_m} - 1}{(y_n^{(3)} z_m - x)^2} (1 - e^{-x u \tau / z_m}) - \sum_n f_n^{(3)} e^{y_n^{(3)}(\hat{z} + u\tau)} \int_0^{\infty} dx \frac{\sqrt{x \left(\frac{x}{\gamma^2} + \beta \right)}}{(\beta^{-1} - x)x^2} \times \left[\frac{1}{(y_n^{(3)} z_m)^2} (1 + e^{y_n^{(3)}(\hat{z} + u\tau)} (y_n^{(3)}(\hat{z} + u\tau) - 1)) - \frac{e^{x\hat{z}/z_m}}{(y_n^{(3)} z_m - x)^2} \left(1 + e^{(y_n^{(3)} z_m - x)(\hat{z} + u\tau)/z_m} \times \left((y_n^{(3)} z_m - x) \frac{\hat{z} + u\tau}{z_m} - 1 \right) \right) \right] - \sum_n f_n^{(3)} \int_{\beta\gamma^2}^{\infty} dx \frac{\sqrt{x \left(-\frac{x}{\gamma^2} + \beta \right)}}{x^2(x + \beta^{-1})} \times \left[\frac{1 + e^{y_n^{(3)}(\hat{z} + u\tau)} (y_n^{(3)}(\hat{z} + u\tau) - 1)}{(y_n^{(3)} z_m)^2} - \frac{e^{-x(\hat{z} + u\tau)/z_m}}{(y_n^{(3)} z_m + x)^2} (1 + e^{y_n^{(3)} z_m + x)(\hat{z} + u\tau)/z_m} \times ((y_n^{(3)} z_m + x)(\hat{z} + u\tau) - 1) \right] + \sum_{l=1}^2 \sum_n f_n^{(l)} \mathcal{P} \int_0^{\infty} dx \frac{\sqrt{x \left(\frac{x}{\gamma^2} + \beta \right)}}{(\beta^{-1} - x)x^2} \times \left[-\frac{1}{(y_n^{(l)} z_m)^2} (e^{y_n^{(l)} \hat{z}} (y_n^{(l)} \hat{z} - 1) + 1) + \frac{e^{x\hat{z}/z_m}}{(y_n^{(l)} z_m - x)^2} \times \left(e^{(y_n^{(l)} z_m - x)\hat{z}/z_m} \left((y_n^{(l)} z_m - x) \frac{\hat{z}}{z_m} - 1 \right) + 1 \right) \right] + \sum_{l=1}^2 \sum_n f_n^{(l)} \int_{\beta\gamma^2}^{\infty} dx \frac{\sqrt{x \left(-\frac{x}{\gamma^2} + \beta \right)}}{(\beta^{-1} + x)x^2} \times \left[-\frac{1}{(y_n^{(l)} z_m)^2} (e^{y_n^{(l)} \hat{z}} (y_n^{(l)} \hat{z} - 1) + 1) \right]$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{e^{-x(\hat{z}+u\tau)/z_m}}{(y_n^{(l)} z_m + x)^2} \left(e^{(y_n^{(l)} z_m + x)\hat{z}/z_m} \left((y_n^{(l)} z_m + x)\hat{z}/z_m - 1 \right) + 1 \right) \Big] \\
 & + \sum_{l=1}^2 \sum_n f_n^{(l)} \int_{\beta\gamma^2}^{\infty} dx \frac{\sqrt{x \left(-\frac{x}{\gamma^2} + \beta \right)}}{(\beta^{-1} + x)x^2} \\
 & \times \left[\left(e^{-x\hat{z}/z_m} - e^{-x(\hat{z}+u\tau)/z_m} \right) \right. \\
 & \left. \times e^{(y_n^{(l)} z_m + x)\hat{z}/z_m} \frac{(y_n^{(l)} z_m + x)\hat{z}/z_m - 1}{(y_n^{(l)} z_m + x)^2} \right] \Big\}.
 \end{aligned}$$

В заключение рассмотрим модель проводящего "кожу-ха" с законом дисперсии (2) при конечных γ для условий $\omega_{p2} > \nu/2$. В этом случае функция $G_2(k)$, как показано ниже, имеет следующие особенности (рис. 7): три разреза Γ , лежащие на мнимой оси комплексной плоскости $k = s + iv$, а также два полюса $k_{1,2} = \pm k_0^{(2)} - i\alpha_2$, где $k_0^{(2)} = \sqrt{(\beta\lambda_2)^{-2} - \alpha_2^2}$, $\alpha_2 = \bar{\nu}_2/2$, $\bar{\nu}_2 = \nu_2/u$,

$$\Gamma_i \Big|_{i=1,2,3} : \begin{cases} s = 0 \\ \frac{v(v-v_1)(v-v_2)}{v-\bar{\nu}_2} > 0 \end{cases},$$

$$v_{1,2} = -\frac{1}{2}\bar{\nu}_2 \mp \sqrt{\frac{\bar{\nu}_2^2}{4} + \frac{\gamma^2}{\beta^2\lambda_2^2}}.$$

Вклады от полюсов в оригинал $G_2(\hat{z})$ функции $G_2(k)$ в случае $\omega_{p2} > \nu_2/2$ определяются аналогично тому, как

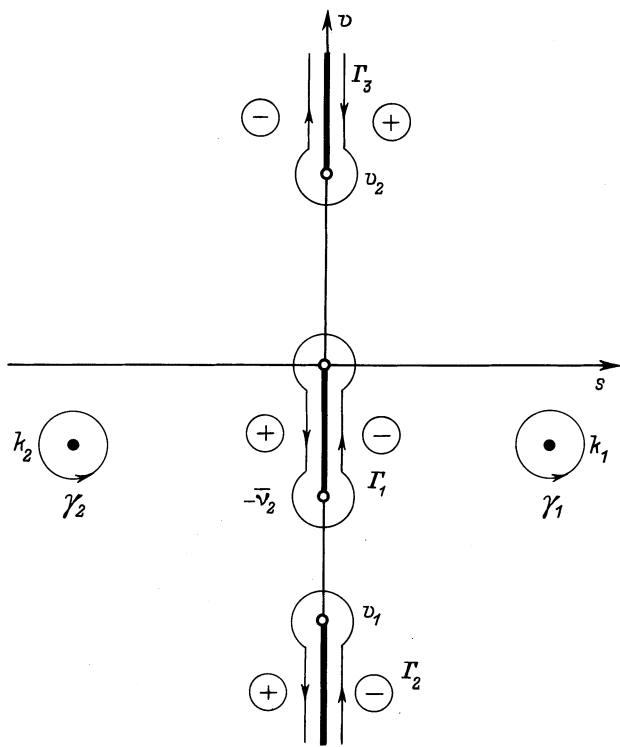


Рис. 7.

это было проделано в условиях $\gamma \rightarrow \infty$. Несколько изменяются значения для $\kappa_2(k_{1,2})$, a , b , Φ . В данном случае имеем

$$\begin{aligned}
 \kappa_2^2(k_{1,2}) &= \left(\frac{1}{\lambda_2^2} - 2\alpha_2^2 \right) \left(1 + \frac{1}{\gamma^2} \right) \mp i2\alpha_2 k_0^{(2)} \beta^2 = \rho^2 e^{\mp 2\Phi i}, \\
 \kappa_2(k_{1,2}) &= \rho e^{\mp \Phi i} = a \mp bi, \\
 \Phi &= \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2\alpha_2 k_0^{(2)} \beta^2}{(\lambda_2^{-2} - 2\alpha_2^2)(1 + 1/\gamma^2)}.
 \end{aligned}$$

В результате имеем

$$\begin{aligned}
 G_{1-2}(\hat{z}) \equiv G(\hat{z}) \Big|_{k_{1,2}} &= \frac{\lambda_2^2}{k_0^{(2)}} e^{\alpha_2 \hat{z}} \left\{ [2a\alpha_2 k_0^{(2)} - b(\lambda_2^{-2} - 2\alpha_2^2)] \right. \\
 & \left. \times \cos k_0^{(2)} \hat{z} + [2b\alpha_2 k_0^{(2)} + a(\lambda_2^{-2} - 2\alpha_2^2)] \sin k_0^{(2)} \hat{z} \right\} \eta(-\hat{z}).
 \end{aligned}$$

Оригинал $G_2(\hat{z})$ определяется аддитивными вкладами полюсов и разрезов Γ_i . Определяя последовательно вклады от разрезов, получим

$$\begin{aligned}
 G(\hat{z}) \Big|_{\Gamma_1} &= -\frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_0^{\tilde{\lambda}_2} \frac{dx}{x} \sqrt{\frac{\tilde{\lambda}_2 - x}{x} + \frac{1}{\gamma^2} (\tilde{\lambda}_2 - x)^2} \\
 & \times \frac{e^{x\frac{\hat{z}}{\lambda_2}}}{x^2 - \tilde{\lambda}_2 x + 1} \eta(-\hat{z}), \\
 G(\hat{z}) \Big|_{\Gamma_2} &= \frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{x_1}^{\infty} \frac{dx}{x} \sqrt{\frac{\tilde{\lambda}_2 - x}{x} + \frac{1}{\gamma^2} (\tilde{\lambda}_2 - x)^2} \\
 & \times \frac{e^{x\frac{\hat{z}}{\lambda_2}}}{x^2 - \tilde{\lambda}_2 x + 1} \eta(-\hat{z}), \\
 G(\hat{z}) \Big|_{\Gamma_3} &= \frac{1}{\pi} \int_{x_2}^{\infty} \frac{dx}{x} \sqrt{-\frac{\tilde{\lambda}_2 + x}{x} + \frac{1}{\gamma^2} (\tilde{\lambda}_2 + x)^2} \\
 & \times \frac{e^{-x\frac{\hat{z}}{\lambda_2}}}{x^2 + \tilde{\lambda}_2 x + 1} \eta(\hat{z}),
 \end{aligned}$$

где

$$x_{1,2} = \sqrt{\left(\frac{\nu_2}{2\beta\omega_{p2}} \right)^2 + \gamma^2} \pm \frac{\nu_2}{2\beta\omega_{p2}}.$$

В случае $\omega_{p2} < \nu_2/2$ исчезает вклад от полюсов, т.е. в оригинал $G_2(\hat{z})$ не входит слагаемое $G_{1-2}(\hat{z})$. В остальном процедура вычисления составляющей силы F_2 аналогична проделанной выше для σ -модели.

Выводы

Полученные в данной работе результаты позволяют определить силовое взаимодействие пучка релятивистских электронов с системой плазменный канал-высокопроводящий "кожу" в самых разнообразных физических условиях в рамках используемых моделей сред

в канале и "кожухе". В случае ленточного пучка удается решить задачу при его произвольной толщине и произвольном отклонении от оси плазменного канала. В случае цилиндрического канала нам удалось проанализировать задачу лишь для "тонких" пучков.

Работа выполнена при финансовой поддержке темы "Интеграция".

Список литературы

- [1] Рухадзе А.А., Богданкевич Л.С., Росинский С.Е., Рухлин В.Г. Физика сильноточных релятивистских электронных пучков. М.: Атомиздат, 1980. 168 с.
- [2] Martin W.E. // Phys. Rev. Lett. 1985. Vol. 54. N 7. P. 685–688.
- [3] Стрелков П.С., Ульянов Д.К. // Физика плазмы. 2000. Т. 26. № 4. С. 329–333.
- [4] Курышев А.П., Соколюк В.Б., Чернов С.В. // ЖТФ. 1987. Т. 57. Вып. 7. С. 1292–1299.
- [5] Курышев А.П., Чернов С.В. // ЖТФ. 1988. Т. 58. Вып. 11. С. 2106–2112.
- [6] Колесников Е.К., Мануйлов А.С. // ЖТФ. 1995. Т. 60. Вып. 1. С. 40–44.
- [7] Зеленский А.Г., Колесников Е.К. // ЖТФ. 1995. Т. 65. Вып. 5. С. 188–190.
- [8] Григорьев В.П., Диденко А.В., Исаев Г.П. // Физика плазмы. 1983. Т. 9. Вып. 6. С. 1254–1260.
- [9] Владыко В.Б., Дудяк Ю.В. // ЖТФ. 1990. Т. 60. Вып. 8. С. 199–201.
- [10] Курышев А.П., Андреев В.Д. // ЖТФ. 1996. Т. 66. Вып. 8. С. 143–156.