01

Поляризация двух близко расположенных металлических сфер во внешнем однородном электрическом поле

© И.Е. Мазец

Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе РАН,
194021 Санкт-Петербург, Россия

(Поступило в Редакцию 17 декабря 1999 г.)

Рассчитан дипольный момент, приобретаемый во внешнем электрическом поле каждой из двух незаряженных проводящих сфер радиуса R, центры которых находятся друг от друга на расстоянии $2l$. Показано, что при $R/l \lesssim 0.8$ влияние высших мультипольных моментов незначительно.

Рассмотрим две одинаковые изолированные незаряженные идеально проводящие сферы радиуса R, помещенные во внешнее однородное электрическое поле $\mathbf{E}_0$ в вакууме. Центры сфер лежат на оси z и отстоят на россторяние $2l$ друг от друга. Каждая из сфер приобретает дипольный момент $\mathbf{p}$, связанный с напряженностью внешнего поля соотношением

$$\mathbf{p} = a\mathbf{E}_0. \tag{1}$$

Вычислим коэффициент пропорциональности a (эффективную поляризуемость). Для изолированной сферы, как известно, эта величина равна кубу радиуса. Наличие на конечных расстояниях других проводников, в частности второй сферы, приводит к отличию от $\mathbf{E}_0$ однородной составляющей электрического поля в окрестности первой сферы. В случае далеко отстоящих сфер $R \ll l$ существенно лишь их прямое диполь-дипольное взаимодействие. При учете лишь этого взаимодействия эффективная поляризуемость вычисляется элементарно

$$a_{zz} = \frac{R^3}{1-(R/l)^3/4}, \tag{2}$$

$$a_{xx} = a_{yy} = \frac{R^3}{1+(R/l)^3/8}. \tag{3}$$

Выражения (2) и (3) справедливы для случаев, когда внешнее поле направлено соответственно параллельно или перпендикулярно оси z. Но в общем случае следует учесть вклады мельтипольных моментов высшего порядка. Поле, создаваемое дипольным распределением зарядов на первой сфере, в окрестности второй сферы неоднородно (пространственный масштаб неоднородности порядка l). Вторая сфера приобретает мультипольные моменты высших порядков, которые в свою очередь меняют однородную компоненту поля вблизи первой сферы. Представляется интересным количественно определить их вклад в эффективную поляризуемость, тем более, что аналогичные эффекты в электростатическом взаимодействии близко расположенных заряженных металлических сфер оказываются достаточно заметными [1].

Метод, решения, основанный на разложении по сферическим гармоникам [2], приводит к системе, состоящей из бесконечного числа линейных алгебраических уравнений для мультипольных моментов, которая не может быть решена в замкнутом аналитическом виде. Поэтому областью применения подобного метода являются приближенные расчеты поляризации кластеров, состоящих более чем из двух металлических частиц. Случай же двух сфер допускает аналитическое решение в биполярных координатах [3] α, β, ϕ, которые связаны с декартовыми координатами посредством соотношений

$$x = \frac{c\sin\alpha\cos\phi}{\operatorname{ch}\beta-\cos\alpha}, \qquad y = \frac{c\sin\alpha\sin\phi}{\operatorname{ch}\beta-\cos\alpha},$$

$$z = \frac{c\cos\alpha}{\operatorname{ch}\beta-\cos\alpha}. \tag{4}$$

Поверхности сфер задаются уравнениями $\beta = \pm\beta_0$, где $\operatorname{ch}\beta_0 = l/R$. Кроме того, $c = (l^2-R^2)^{1/2}$. Потенциал в пространстве вне сфер представляется в виде суммы потенциала внешнего поля, который равен $-\mathbf{E}_0\mathbf{r}$, и потенциала φ', создаваемого распределением заряда на поверхностях сфер. Решение для случая, когда внешнее поле направлено вдоль оси z, имеет вид [3]

$$\varphi' = (2\operatorname{ch}\beta - 2\cos\alpha)^{1/2}E_0c\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1-\gamma)$$

$$\times\exp\big[-(n+1/2)\beta_0\big]\frac{\operatorname{sh}\big[(n+1/2)\beta\big]}{\operatorname{sh}\big[(n+1/2)\beta_0\big]}P_n(\cos\alpha), \tag{5}$$

где $P_n(\cos\alpha)$ — полином Лежандра, и

$$\gamma = F^{(-)}(1,\beta_0)/F^{(-)}(0,\beta_0). \tag{6}$$

Мы вводим обозначения

$$F^{(-)}(q,\beta_0) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)^q\exp\big[-(n+1/2)\beta_0\big]}{\operatorname{sh}\big[(n+1/2)\beta_0\big]},$$

$$F^{(+)}(q,\beta_0) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)^q\exp\big[-(n+1/2)\beta_0\big]}{\operatorname{ch}\big[(n+1/2)\beta_0\big]}. \tag{7}$$

Мы вычислили также потенциал, создаваемый сферами во внешнем поле, направленном вдоль оси x. Формула для него имеет вид

$$\varphi' = 2(2\operatorname{ch}\beta - 2\cos\alpha)^{1/2}E_0 c\sum_{n=0}^{\infty}\exp\bigl[-(n+1/2)\beta_0\bigr]$$
$$\times\frac{\operatorname{ch}\bigl[(n+1/2)\beta\bigr]}{\operatorname{ch}\bigl[(n+1/2)\beta_0\bigr]}P_n^1(\cos\alpha)\cos\phi, \qquad (8)$$

$P_n^1(\cos\alpha)$ — присоединенный полином. Лежандра первого порядка.

Проанализируем теперь выражение (5) с целью определения направленного вдоль z дипольного момента **p**, которым обладает каждая из двух сфер. Непосредственное его вычисление через распределение заряда на поверхности сферы возможно, но громоздко. Гораздо легче установить его из поведения φ' на больших расстояниях. Действительно, при $x = y = 0$, $z \to +\infty$ (т. е. при $\alpha = 0$, $\beta \sim 2c/z \to 0$) потенциал, создаваемый обеими сферами, должен иметь асимптотику $2p/z^2 \sim \beta^2 p/(2c^2)$. Отсюда с учетом равенства $P_n(0) = 1$ находится величина p и, следовательно, эффективная поляризуемость

$$a_{zz} = c^3\bigl[F^{(-)}(2,\beta_0) - \gamma F^{(-)}(1,\beta_0)\bigr]. \qquad (9)$$

Аналогичным образом из асимптотики выражения (8) при $\beta = 0$, $\alpha \sim 2c(x^2+y^2)^{-1/2} \to 0$ находится эффективная поляризуемость во внешнем поле, направленном перпендикулярно прямой, соединяющей центры сфер

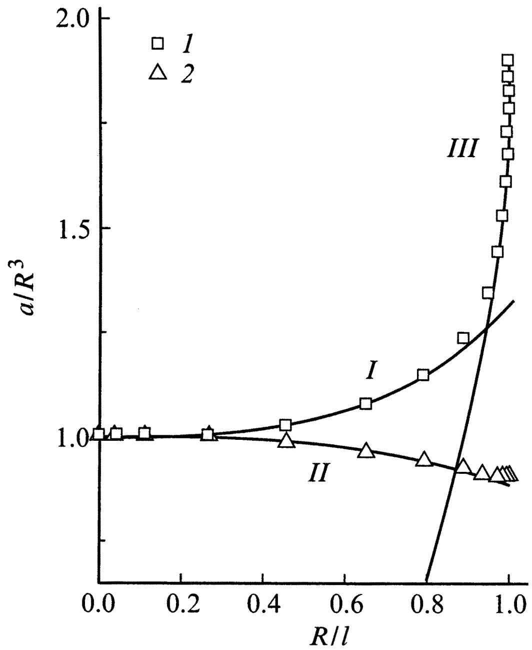
$$a_{xx} = a_{yy} = \frac{1}{2}c^3\bigl[F^{(+)}(2,\beta_0) - F^{(+)}(0,\beta_0)\bigr]. \qquad (10)$$

При малых R/l формулы (9), (10) дают приближенно

$$a_{zz} \approx R^3\left[1 + \frac{1}{4}(R/l)^3 + \frac{1}{16}(R/l)^6\right],$$
$$a_{xx} \approx R^3\left[1 - \frac{1}{8}(R/l)^3 + \frac{1}{64}(R/l)^6\right], \qquad (11)$$

что превосходно согласуется с выражениями (2), (3).

На рисунке представлены результаты расчета эффективной поляризуемости по формулам (9), (10) в зависимости от расстояния между центрами сфер. Очевидно, что приближенное выражение (2) хорошо описывает ситуацию вплоть до $R/l \sim 0.8$, а выражение (3) близко к точному на всем промежутке возможных значений параметра R/l. Это согласуется с тем, что описание эффективной диэлектрической проницаемости тонких металлических пленок с помощью формул, учитывающих лишь прямое диполь-дипольное взаимодействие между отдельными островками металла [4] (влияние субстрата также учитывается в модели взаимодействия реальных диполей с диполями-изображениями [5]), адекватно для интерпретации экспериментальных данных в широком диапазоне отношений размера металлических островков



Результаты расчета эффективной поляризуемости по точным формулам для a_{zz} (*1*) и a_{xx} (*2*). Показаны также приближенные зависимости (2) (*I*) и (3) (*II*), а также асимптотика (12) (*III*).

к пространственному периоду составленной из них периодической поверхностной структуры [6]. Разумеется, указанный пространственный период должен быть много меньше длины волны падающего излучения, чтобы эффективная диэлектрическая проницаемость могла быть вычислена в квазистатическом приближении.

Исследуем, наконец, поведение решений и для случая очень близко расположенных шаров. В этом случае параметр $\beta_0 = \ln\bigl[l/R + (l^2/R^2-1)^{1/2}\bigr]$ стремится к нулю. Пользуясь выражениями для соответствующих асимптотик функций $F^{(\pm)}(q,\beta_0)$ (способ вычисления этих асимптотик с помощью интегрального преобразования Меллина указан в [3]; заметим, что приведенный там результат для $F^{(-)}(1,\beta_0)$ содержит арифметическую ошибку), которые выписаны в Приложении, можно найти следующие приближенные выражения для эффективной поляризуемости каждой из двух сфер во внешнем поле, как параллельном

$$a_{zz} \approx R^3\left[2\zeta(3) - \frac{\zeta(2)^2}{C + \ln\bigl[2/(l^2/R^2-1)^{-1/2}\bigr]}\right], \qquad (12)$$

так и перпендикулярном оси z

$$a_{xx} \approx R^2\left[\frac{3\zeta(3)}{4} - \frac{\ln 2}{2}(l^2/R^2 - 1)\right]. \qquad (13)$$

Здесь $\zeta(s)$ — дзета-функция Римана, $C = 0.577\ldots$ — постоянная Эйлера. В то время как для внешнего поля, перпендикулярного оси z, эффективная поляризуемость при сколь угодно близком расположении сфер менее чем на два процента отличается от значения, которое дается приближенной формулой (3), в случае поля, параллельного z, эффективная поляризуемость, оставаясь конечной, имеет особенность в производной по R/L. Но участок, где a_{zz} резко меняется, невелик. Уже при $R/l \approx 0.95$ значения a_{zz}, вычисленные по формулам (12) и (2), сравниваются. При дальнейшем увеличении расстояния между сферами приближение, учитывающее только прямое диполь-дипольное взаимодействие, работает все лучше, а начиная с $R/l \approx 0.80$ его отличие от точного результата становится менее 1%. Малость вклада в эффективную поляризуемость непрямого включающего наведения мультиполей высшего порядка на соседней сфере взаимодействия является, на наш взгляд, основным качественным результатом, следующим из полученного в настоящей работе точного решения электростатической задачи.

Приложение

Асимптотики функций (7) при стремящемся к нулю аргументе β_0

$$F^{(-)}(0,\beta_0) \sim \frac{1}{\beta_0}\left[C + \ln(2/\beta_0)\right] + \frac{\beta_0}{72},$$

$$F^{(-)}(1,\beta_0) \sim \frac{\zeta(2)}{\beta_0^2} - \frac{1}{12},$$

$$F^{(-)}(2,\beta_0) \sim \frac{2\zeta(3)}{\beta_0^3} + \frac{1}{6\beta_0},$$

$$F^{(+)}(0,\beta_0) \sim \frac{\ln 2}{\beta_0},$$

$$F^{(+)}(1,\beta_0) \sim \frac{\zeta(2)}{2\beta_0^2} + \frac{1}{12},$$

$$F^{(+)}(2,\beta_0) \sim \frac{3\zeta(3)}{2\beta_0^3}.$$

Список литературы

[1] *Саранин В.А.* // УФН. 1999. Т. 169. № 4. С. 453–458.
[2] *Gérardy J.M., Ausloos M.* // Phys. Rev. B. 1980. Vol. 22. N 10. P. 4950–4959.
[3] *Бухгольц Г.* Расчет электрических и магнитных полей. М.: ИЛ, 1961.
[4] *Yamaguchi T., Yoshida S., Kinbara A.* // Thin Solid Films. 1973. Vol. 18. N 1. P. 63–70.
[5] *Yamaguchi T., Yoshida S., Kinbara A.* // Thin Solid Films. 1974. Vol. 21. N 1. P. 173–187.
[6] *Niklasson G.A., Graignead H.G.* // Thin Solid Films. 1985. Vol. 125. N 1/2. P. 165–170.