01;04

Кинетическая теория поверхностных волн в полуограниченном плазменном потоке

© А.Ф. Александров, А.А. Рухадзе

Институт общей физики РАН,
117942 Москва, Россия

(Поступило в Редакцию 28 сентября 1998 г.)

Исследуется спектр поверхностных волн в полуограниченном плазменном потоке. Проанализированы спектры частот и декременты затухания волн, распространяющихся вдоль потока, как в высокочастотном пределе, когда пространственная дисперсия слаба и в затухание волн определяющий вклад дают столкновения электронов, так и в низкочастотном пределе, когда существенны эффекты пространственной дисперсии. В частности, исследуется влияние скорости потока на характер распространения ионно-звуковых волн. Особое внимание уделяется вопросу проникновения статического поля в плазму в условиях, когда скорость потока больше скорости звука.

Введение. Формулировка задачи

Поверхностные волны в плазме уже давно привлекают внимание исследователей [1–3], в первую очередь благодаря особенностям их частотного спектра $\omega(\mathbf{k})$. Такие волны существуют в области частот $\omega < \omega_{Le}$, что позволяет с их помощью создавать плазму со сверхкритической плотностью, как это имеет место в плазменных источниках, называемых сурфатронами [4].

В рассматриваемой нами задаче исследуется поверхностная волна в плазменном потоке как возможный источник ионизации сверхзвукового потока газа и создания сверхзвукового плазмотрона с высокой плотностью плазмы [5,6]. Рассматривается простейший случай полуограниченного плазменного потока изотропной (незамагниченной) плазмы, причем предполагается, что распространение волны происходит вдоль направления течения плазмы. Исследуются как высокочастотный предел, когда поверхностная волна является чисто электронной и пространственная дисперсия диэлектрической проницаемости пренебрежимо мала, так и низкочастотный предел, когда движение ионов и пространственная дисперсия играют определяющую роль. В частности, рассмотрены поверхностная ионно-звуковая волна в потоке плазмы, а также возможность проникновения статического поля в плазму при сверхзвуковом течении потока.

Формулировку задачи мы дадим для бесстолкновительной плазмы, исходя из уравнения Власова. Однако впоследствии полученное дисперсионное уравнение обобщим на случай произвольно столкновительной, но слабоионизованной плазмы с модельным интегралом столкновений Батнагара–Гросса–Крука (БГК) [3]. Следуя [3], запишем уравнения Власова и граничное условие (зеркальное отражение частиц) для электронов и ионов для малых возмущений равновесных функций распределения в потоке в следующем виде:

$$-i(\omega-k_z v_z)\delta f+v_x\frac{\partial\delta f}{\partial x}+\frac{e}{m}\left\{\mathbf{E}+\frac{1}{c}[\mathbf{vB}]\right\}\frac{\partial f_0(\mathbf{v}-\mathbf{u})}{\partial\mathbf{v}}=0,$$

$$\delta f(x=0, v_x>0)=\delta f(x=0, v_x<0). \qquad (1)$$

Здесь предполагается, что $\delta f \approx \delta f(x)c^{-i\omega t+ik_z}$; $f_0(\mathbf{v}-\mathbf{u})$ — распределение Максвелла, в котором $\mathbf{u}$ — направленная скорость потока, параллельная поверхности плазмы $\mathbf{u} \parallel OZ$; индекс сортности частиц для простоты опущен. Уравнение (1) необходимо дополнить уравнениями Максвелла

$$\operatorname{div}\mathbf{E}=4\pi\rho, \qquad \operatorname{rot}\mathbf{B}=+\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}+\frac{4\pi}{c}\mathbf{J},$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}, \qquad \operatorname{div}\mathbf{B}=0, \qquad (2)$$

в которых плотности заряда ρ и тока $\mathbf{j}$ определяются соотношениями

$$\rho=\sum e\int d\mathbf{p}\delta f, \qquad \mathbf{j}=\sum e\int d\mathbf{p}\mathbf{v}\delta f, \qquad (3)$$

где суммирование производится по сортам заряженных частиц.

Граничные условия для полей $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ получаются непосредственно из системы (2) путем интегрирования вблизи границы раздела $x=0$ (считаем, что в области $x<0$ плазма, а при $x>0$ вакуум)

$$\{E_t\}_{x=0}=0, \qquad \{B_n\}_{x=0}=0,$$

$$\{E_n\}_{x=0}=4\pi\rho_n, \qquad \{B_t\}_{x=0}=\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}_n, \qquad (4)$$

где ρ_n и $\mathbf{j}_n$ — поверхностные плотности индуцированных зарядов и токов, которые получаются при интегрировании первого и второго уравнений системы (2).

Чтобы закончить формулировку задачи и свести ее к виду, уже исследованному раньше [3], надо в (2) поля представить в виде $\mathbf{E}, \mathbf{B} \approx \mathbf{E}, \mathbf{B}\exp(-i\omega t+ik_z z)$ и перейти в систему координат, движущуюся вместе с потоком (это эквивалентно замене $\mathbf{v}-\mathbf{u} \to \mathbf{v}$, при этом $f_0(\mathbf{v}-\mathbf{u})$ переходит в изотропное максвелловское распределение). Окончательно получим

$$-i(\omega-k_z v_z)\delta f+v_x\frac{\partial\delta f}{\partial x}=-\frac{e}{m}\left\{\frac{\omega'}{\omega}\mathbf{E}+\frac{\mathbf{k}(\mathbf{uE})}{\omega}\right\}\frac{\partial f_0(v)}{\partial\mathbf{v}},$$

$$\delta f(x=0, v_x>0) = \delta f(x=0, v_x<0) \quad (5)$$

$$\rho = \rho' = \sum e \int \delta f d\mathbf{p}, \quad \mathbf{j} = \sum e \int d\mathbf{p}(\mathbf{v}-\mathbf{u})\delta f$$
$$= e\int d\mathbf{p}\mathbf{v}\delta f + \mathbf{u}\rho = \mathbf{j}' + \mathbf{u}\rho', \quad (6)$$

где $\omega' = \omega - \mathbf{ku} = \omega - k_z u$.

Уравнения Максвелла мы здесь не будем выписывать, так как они совпадают с (2) с заменой $\rho \to \rho'$ и $\mathbf{j} \to \mathbf{j}'$ [3].

Решение задачи. Дисперсионное уравнение для поверхностных волн

Решение сформулированной задачи полностью аналогично проведенному в [3]. Именно из уравнений поля, которые для фурье-образов сводятся к виду

$$\left\{k^2\delta_{ij} - k_i k_j - \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_{ij}(\omega_i \mathbf{k})\right\} E_j = \frac{4\pi i\omega}{c^2} j_{0i},$$

$$\frac{4\pi}{c} j_{0i} = 2B_y(0)\delta_{iz}. \quad (7)$$

Необходимо определить $E_z(z)$, выразив его через $B_y(0)$, в областях $x < 0$ и $x > 0$. После этого необходимо воспользоваться условиями непрерывности величин $E_z(0)$ и $B_y(0)$ на границе потока, что и приводит к искомому дисперсионному уравнению для поверхностных волн. Новое появляется при использовании конкретного вида $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$. Именно выражение для $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ в рассматриваемом случае имеет вид, отличный от исследованного в [3],

$$\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \delta_{ij} + \frac{\omega'^2}{\omega^2}\left[\left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2}\right)(\varepsilon^{tr}(\omega', k) - 1)\right.$$
$$\left. + \left(\frac{k_i k_j}{k^2} + \frac{u_i k_j + k_i u_j}{\omega} + \frac{u_i u_j k^2}{\omega'^2}\left(\varepsilon^1(\omega', k) - 1\right)\right)\right]. \quad (8)$$

Это выражение получается путем интегрирования кинетического уравнения (1) с учетом соотношений (6), причем $\varepsilon^{tr,1}(\omega', k)$ — известные выражения для максвелловской плазмы, но с заменой $\omega \to \omega'$.

Не производя громоздких, но в общем простых вычислений, аналогичных приведенным ранее [3], выпишем окончательный вид дисперсионного уравнения для поверхностной волны в полуограниченном потоке

$$\sqrt{\frac{k_z^2 c^2}{\omega^2} - 1} + \frac{2}{\pi}\frac{c}{\omega}\int\limits_0^{+\infty} dk_x \left[-\frac{(\omega'^2)k_x^2}{c^2 k^2 A} + \frac{k_z^2}{k^2}\frac{1}{\varepsilon^1}\right] = 0, \quad (9)$$

где введена величина

$$A = k^2 - \frac{\omega'^2}{c^2} - \frac{\omega'^2}{c^2}\left(\varepsilon^{tr}(\omega', k) - 1\right), \quad (10)$$

нули которой соответствуют корням дисперсионного уравнения для поперечных волн с учетом нерелятивизма скорости течения плазмы $u \ll c$.

Приведем здесь различные предельные случаи уравнения (9), которые более детально мы исследуем в следующем разделе. Прежде всего рассмотрим предел холодной плазмы, когда тепловым движением частиц (так же как и движением ионов) можно пренебречь. Если пренебречь столкновениями (до сих пор мы их не учитывали), то в этом пределе

$$\varepsilon^1(\omega', \mathbf{k}) = \varepsilon^{tr}(\omega', k) = \varepsilon(\omega') = 1 - \frac{\omega_{Le}^2}{\omega'^2}. \quad (11)$$

После подстановки (11) в (10) и (9) легко получаем дисперсионное уравнение, которое получается и в рамках гидродинамической модели "холодной" плазмы,

$$\sqrt{k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\left[1 - \frac{\omega'^2}{\omega^2}(\varepsilon(\omega') - 1)\right]}$$
$$+ \varepsilon(\omega')\sqrt{k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} = 0 \quad (12)$$

или в явном виде

$$\sqrt{k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\left(1 - \frac{\omega_{Le}^2}{\omega^2}\right)}$$
$$+ \left(1 - \frac{\omega_{Le}^2}{(\omega - k_z u)^2}\right)\sqrt{k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} = 0. \quad (13)$$

Естественно, что при $u = 0$ это уравнение переходит в хорошо известное уравнение для поверхностной волны в "холодной" бесстолкновительной полуограниченной плазме [1,3]. Если же $u \neq 0$, появляется первая особенность таких волн в движущейся плазме — они оказываются невзаимными, т. е. $\omega(k_z) \neq \omega(-k_z)$.

Вторая особенность связана с расщеплением поверхностных волн на быструю и медленную, удовлетворяющих условию

$$(\omega - k_z u)^2 < \omega_{Le}^2. \quad (14)$$

Это расщепление особенно явно видно в коротковолновом пределе, когда $|k_z c| \gg \omega_{Le}$ и можно ограничиться потенциальным приближением для поля $\mathbf{E} = -\boldsymbol{\nabla}\Phi$. В этом пределе уравнение (12) сводится к виду

$$2 - \frac{\omega_{Le}^2}{(\omega - k_z u)^2} = 0 \quad (15)$$

и имеет два решения в виде быстрой и медленной волн

$$\omega = k_z u \pm \frac{\omega_{Le}}{\sqrt{2}}. \quad (16)$$

Для нас наибольший интерес представляет как раз потенциальное приближение, поскольку $u \ll c$, а поэтому и интересующие нас волны также обладают малой фазовой скоростью $\omega/k_z \ll c$. В этом пределе уравнение (9) сводится к виду

$$1 + \frac{2|k_z|}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\frac{dk_x}{k^2\varepsilon^1(\omega - k_z u, k)} = 0. \quad (17)$$

В следующем разделе мы исследуем его подробно. Здесь же отметим, что оно, так же как и общее дисперсионное уравнение (9) и само выражение для $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ (8), сохраняют свой вид и в столкновительной плазме (для слабоионизованной плазмы это просто очевидно). Нужно только во всех приведенных в этом разделе соотношениях использовать выражения для $\varepsilon^1(\omega', \mathbf{k})$ и $\varepsilon^{tr}(\omega', \mathbf{k})$, учитывающие столкновения частиц [3].

Спектры низкочастотных поверхностных волн в плазменном потоке

Приступая к анализу уравнения (17), прежде всего рассмотрим область частот ионно-звуковых волн, считая выполненными неравенства

$$kv_{Te} \gg |\omega - k_z u| \gg kv_{Ti} \tag{18}$$

и пренебрегая столкновениями. В этих условиях для $\varepsilon'(\omega', k)$ можно воспользоваться выражением [3]

$$\varepsilon^1(\omega', k) = 1 - \frac{\omega_{Li}^2}{\omega'^2} + \frac{\omega_{Le}^2}{k^2 v_{Te}^2}\left(1 + i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{\omega'}{kv_{Te}}\right). \tag{19}$$

Диссипативное слагаемое в (19) обусловлено черенковским поглощением волн электронами плазмы, что правомерно в предположении $kv_{Te} \gg \nu_e$ (бесстолкновительная плазма). В обратном же пределе сильно столкновительной плазмы следует различать два случая. Первый соответствует условию $\omega\nu_e \gg k^2 v_{Te}^2$, когда выражение (19) теряет смысл и мы переходим к случаю холодной плазмы с дисперсионным уравнением (13), для которого интересным является потенциальный предел

$$2 - \frac{\omega_{Le}^2}{(\omega - k_z u)(\omega - k_z u + i\nu_e)} = 0. \tag{20}$$

Это уравнение отличается от (15) учетом столкновений и ничего принципиально нового по сравнению с уже отмеченным выше не содержит, разве только появляется слабое поглощение поверхностных волн. Если же $\omega'\nu_e \ll k^2 v_{Te}^2$, то диссипативный член в фигурных скобках (19) следует заменить на $i(\omega'\nu_e/k^2 v_{Te}^2)$. Ниже мы рассмотрим наряду с (19) и этот случай чисто столкновительной диссипации.

Подставляя (19) в уравнение (17) и учитывая малость диссипативного слагаемого, мы сразу же приходим к неравенству

$$1 - \frac{\omega_{Li}^2}{(\omega - k_z u)^2} < -\frac{\omega_{Li}^2}{k^2 v_s^2}, \tag{21}$$

где $v_s = \sqrt{T_e/M}$ — скорость неизотермического ионного звука.

Условие (21) вблизи резонанса эквивалентно требованию $(\omega - k_z u) < kv_s$. Легко находятся и спектры колебаний быстрой и медленной ионно-звуковых поверхностных волн и декременты их затухания $(\omega \to \omega + i\delta)$

$$\omega = k_z u \pm \begin{cases} |k_z| v_s & \text{при } |k_z| v_s \ll \omega_{Li}, \\ \dfrac{\omega_{Li}}{\sqrt{2}} & \text{при } |k_z| v_s \gg \omega_{Li}, \end{cases} \tag{22}$$

$$\delta = \begin{cases} -\sqrt{\dfrac{\pi}{8}\dfrac{m}{M}}|\omega - k_z u| & \text{при } k_z v_s \ll \omega_{Li}, \\ -\dfrac{1}{6}\sqrt{\dfrac{m}{M\pi}}\dfrac{\omega_{Li}^2}{|k_z|^3 v_s^3}|\omega - k_z u| & \text{при } k_z v_s \gg \omega_{Li}. \end{cases} \tag{23}$$

Последние выражения для декрементов затухания легко обобщаются на столкновительную плазму в условиях $\omega\nu_e \ll k^2 v_{Te}^2$

$$\delta = \begin{cases} -\dfrac{m}{M}\nu_e\dfrac{|k_z|^3 v_s^3}{\omega_{Li}^3} & \text{при } |k_z| v_s \ll \omega_{Li}, \\ -\dfrac{3}{8}\dfrac{\omega_{Li}^4}{k_z^4 v_s^4}\nu_e & \text{при } |k_z| v_s \gg \omega_{Li}. \end{cases} \tag{24}$$

Полученные формулы для спектров ионно-звуковых поверхностных волн в плазменном потоке аналогичны соответствующим формулам для полуограниченной покоящейся плазмы. Отличие состоит лишь в доплеровском сдвиге частот колебаний, что видно из (23). Но именно это обстоятельство существенно влияет на характер распространения поверхностных волн вдоль поверхности плазмы. В покоящейся плазме в статическом пределе уравнение (17) не допускает решений с действительным волновым вектором k_z — статическое поле экранируется на расстоянии дебаевского радиуса от источника. Иное положение имеет место в движущейся плазме: при $\omega = 0$ из (17) в условиях (18) и (19) следует (здесь мы диссипацией пренебрегли) (для простоты)

$$1 - \frac{\omega_{Li}^2}{k_z^2 u^2} + \left(1 + \frac{\omega_{Li}^2}{v_s^2 k_z^2}\frac{1}{1 - \frac{\omega_{Li}^2}{k_z^2 u^2}}\right)^{-1/2} = 0. \tag{25}$$

Это уравнение допускает существование действительных решений в области $k_z^2 u^2 < \omega_{Li}^2$, если только (в пределе плазмы, $k_z^2 u^2 \ll \omega_{Li}^2$)

$$v_{Ti}^2 < u^2 < v_s^2. \tag{26}$$

Левое неравенство обеспечивает пренебрежение тепловым движением ионов и вместе с правым требует неизотермичности плазмы с $T_e \gg T_i$, в которой только и возможно существование рассмотренных выше ионно-звуковых волн. Решение уравнения (26) при этом имеет вид

$$k_{z0}^2 = \frac{\omega_{Li}^2}{u^2}\left(1 - \frac{u^2}{v_s^2}\right)^{1/2} \tag{27}$$

и свидетельствует о периодическом характере изменения квазистатического поля вдоль поверхности с периодом k_{z0}^{-1}. С ростом отношения u/v_s, когда $u \to v_s$, период k_{z0}^{-1} увеличивается и при $u = v_s$ решение (27) теряет смысл.

Для случая газового разряда, поддерживаемого таким переменным электрическим полем, отмеченное обстоятельство должно проявляться в виде продольной модуляции температуры и плотности плазмы.

Список литературы

[1] *Кондратенко А.Н.* Поверхностные и объемные волны в ограниченной плазме. М.: Атомиздат, 1987.

[2] *Кондратенко А.Н.* Проникновение поля в плазму. М.: Атомиздат, 1974.

[3] *Александров А.Ф., Богданкевич Л.С., Рухадзе А.А.* Основы электродинамики плазмы. М.: Высшая школа, 1978 (1-е изд.), 1988 (2-е изд.). Principles Plasma Electrodynamics. Springler Verlag, 1984.

[4] *Bulkin P.S., Ershov A.P., Solntsev G.S.* et al. // Moscow University Physics Bulletin. 1992. Vol. 47. N 1. P. 50–54.

[5] *Александров А.Ф., Ершов А.П., Имад И.* и др. // ТВТ. 1993. Т. 31. № 5. С. 850–851.

[6] *Ershov A.P., Liagushin B., Chuvashev S.* et al. // Proc. USAF Academy. Colorado, 1997. Section M. P. 3–13.