

01;12

## К вопросу о "самозахоронении" радиоактивных отходов

© Л.Я. Косачевский, Л.С. Сюи

Московский государственный университет природообустройства,  
127550 Москва, Россия

(Поступило в Редакцию 24 марта 1998 г. В окончательной редакции 11 января 1999 г.)

Решена задача о "самозахоронении" сферического контейнера конечной толщины с радиоактивными отходами в плавящуюся горную породу. Построенная математическая модель в отличие от существующих учитывает тепловые потери в твердую породу и в расплав позади контейнера, а также обратное тепловыделение при отвердевании расплава. Расчет для частного случая "самозахоронения" в гранит показывает, что учет этих факторов существенно увеличивает предельно допустимый радиус, при котором контейнер остается в твердом состоянии, и уменьшает скорость его погружения.

Одним из перспективных способов окончательного удаления радиоактивных отходов (РАО) является "самозахоронение". За счет тепловыделения, сопровождающего радиоактивный распад, контейнер с РАО расплавляет окружающую горную породу и погружается в нее под действием собственного веса. Возрастание тепловых затрат на плавление породы при ускоренном в начальной стадии погружении обеспечивает переход процесса в стационарный режим. Задача о стационарном погружении сферического теплового источника рассматривалась в работе [1] в предположении, что температура его поверхности однородна. Как показано в [2], это не соответствует действительности. Температура минимальна в нижней критической точке и максимальна в верхней, диаметрально противоположной точке. С увеличением радиуса она возрастает. Поэтому для сохранения контейнера в твердом состоянии его радиус не должен превышать предельно допустимый, при котором максимальная температура поверхности достигает точки плавления контейнера. Зависимость предельного радиуса и соответствующей ему максимальной скорости погружения от толщины и теплопроводности контейнера исследовалась в работе [3]. В указанных работах предполагается, что потоком тепла в сторону, противоположную направлению движения, можно пренебречь, а поток в направлении движения полностью расходуется на плавление среды. Обратное тепловыделение при отвердевании расплава позади теплового источника не учитывается. Целью настоящей работы является решение задачи о "самозахоронении" РАО в сферическом контейнере конечной толщины без этих допущений.

Стационарные осесимметричные распределения температуры в РАО  $T^i$  и в стенке контейнера  $T^c$  удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial T^i}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ (1 - \xi^2) \frac{\partial T^i}{\partial \xi} \right] = -\frac{q}{k_i} r^2, \quad r < R_i,$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial T^c}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ (1 - \xi^2) \frac{\partial T^c}{\partial \xi} \right] = 0, \quad R_i < r < R.$$

(1)

Их решения с учетом условий непрерывности температуры и потока тепла на внутренней стороне стенки можно записать в виде [3]

$$T^i(r, \xi) = T_m + \frac{4}{3} \frac{h\nu}{c_p} \left[ \frac{1}{8} \left( 1 - \frac{r^{*2}}{\zeta^2} \right) + \frac{k_i}{4k_c} (1 - \zeta) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_n}{\Omega_n} r^{*n} P_n(\xi) \right],$$

$$T^c(r, \xi) = T_m + \frac{4}{3} \frac{h\nu}{c_p} \left\{ \frac{k_i \zeta}{4k_c} \left( \frac{1}{r^*} - 1 \right) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_n}{(2n+1)\Omega_n} \left[ \left( n+1 + n \frac{k_i}{k_c} \right) r^{*n} + n \left( 1 - \frac{k_i}{k_c} \right) \zeta^{2n+1} r^{*-n-1} \right] P_n(\xi) \right\}. \quad (2)$$

Откуда следуют выражения для числа Стефана

$$S(\xi) = \frac{c_p}{h} [T_w(\xi) - T_m] = \frac{4}{3} \nu \sum_{n=0}^{\infty} C_n P_n(\xi),$$

$$T_w(\xi) = T^c(R, \xi) \quad (3)$$

и потока тепла из источника в окружающую среду

$$-k_c \frac{\partial T^c}{\partial r}(R, \xi) = \frac{4}{3} \frac{h\nu k_i}{c_p R} \left[ \frac{\zeta}{4} - \sum_{n=1}^{\infty} n \Gamma_n C_n P_n(\xi) \right]. \quad (4)$$

Здесь

$$r^* = \frac{r}{R}, \quad \xi = \cos \Theta, \quad \nu = \frac{c_p q R_i^2}{h k_i}, \quad h = h_m + c_p T_m,$$

$$\Gamma_n = \frac{1}{\Omega_n} \left[ 1 + \frac{n+1}{2n+1} \left( \frac{k_c}{k_i} - 1 \right) (1 - \zeta^{2n+1}) \right],$$

$$\Omega_n = 1 - \frac{n}{2n+1} \left( 1 - \frac{k_i}{k_c} \right) (1 - \zeta^{2n+1}), \quad \zeta = \frac{R_i}{R},$$

$C_n$  — произвольные постоянные;  $r$  и  $\Theta$  — сферические координаты;  $P_n(\xi)$  — полиномы Лежандра;  $q$  — тепловая

мощность РАО;  $k_i$  и  $k_c$  — коэффициенты теплопроводности РАО и контейнера;  $c_p$ ,  $T_m$  и  $h_m$  — удельная теплоемкость, температура плавления и теплота фазового перехода среды;  $R_i$  и  $R$  — внутренний и внешний радиусы контейнера, их отношение  $\zeta$  выбирается из соображений механической прочности и в дальнейшем считается фиксированным для различных значений  $R$ .

Область расплава перед тепловым источником  $\xi > 0$  образует тонкий слой, течение в котором описывается методами теории смазки. В системе отсчета, связанной с источником, поле скоростей и давление определяются выражениями [2]

$$\begin{aligned} v_\Theta &= V \frac{y}{\delta^*} \left[ 1 + \frac{3}{\delta^*} \left( 1 - \frac{y}{\delta^*} \right) \right] \sin \Theta, \\ v_r &= -V \left( \frac{y}{\delta^*} \right)^2 \left\{ \left( 3 - 2 \frac{y}{\delta^*} \right) \cos \Theta \right. \\ &\quad \left. + \frac{d\delta^*}{d\Theta} \left[ \frac{1}{2} + \frac{3}{\delta^*} \left( 1 - \frac{y}{\delta^*} \right) \right] \sin \Theta \right\}, \\ p &= p_0 + 6 \frac{\eta V}{R} \int_{\Theta}^{\pi/2} \frac{\sin \Theta}{\delta^{*3}} d\Theta, \quad y = r^* - 1, \quad \delta^* = \frac{\delta}{R}, \quad (5) \end{aligned}$$

где  $\delta$  — толщина слоя,  $\eta$  — коэффициент вязкости,  $V$  — скорость погружения.

В области расплава позади источника  $\xi < 0$  скорость и давление предполагаем постоянными, равным  $V$  и  $p_0$  соответственно. Касательные напряжения на поверхности источника малы по сравнению с давлением. Поэтому сила сопротивления расплава равна

$$F = 2\pi R^2 \int_{-1}^1 p \xi d\xi = 6\pi \eta R V J, \quad J = \int_0^1 (1 - \xi^2) \delta^{*-3} d\xi. \quad (6)$$

Приравняв ее разности сил веса и Архимеда, получаем уравнение

$$VJ = \frac{2}{9} \frac{g}{\eta} R^2 (\rho_1 - \rho), \quad \rho_1 = \rho_c + \zeta^3 (\rho_i - \rho_c), \quad (7)$$

где  $\rho_i$ ,  $\rho_c$  и  $\rho$  — плотности РАО, материала контейнера и среды;  $g$  — ускорение силы тяжести.

Основной вклад в интеграл  $J$  дает малая окрестность точки  $\xi = 1$ . Полагая здесь

$$\delta^*(\xi) = \delta^*(1) - \delta^{*'}(1)(1 - \xi)$$

и принимая  $\delta^*$  за переменную интегрирования, получаем с точностью до главного члена

$$J = \frac{1}{\delta^{*'}(1) [\delta^{*'}(1)]^2}. \quad (8)$$

Осесимметричное распределение температуры в твердой фазе  $T^s$  удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} -V \left( \xi \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1 - \xi^2}{r} \frac{\partial T}{\partial \xi} \right) &= \frac{a}{r^2} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ (1 - \xi^2) \frac{\partial T}{\partial \xi} \right] \right\}. \quad (9) \end{aligned}$$

Согласно сделанному выше предположению, оно справедливо и для распределения температуры  $T^f$  в расплаве при  $\xi < 0$ . Его решение имеет вид

$$\begin{aligned} T^s(r, \xi) &= \frac{1}{\sqrt{r^*}} \exp \left( -\frac{\beta}{2} r^* \xi \right) \sum_{n=0}^{\infty} E_n K_{n+\frac{1}{2}} \left( \frac{\beta}{2} r^* \right) P_n(\xi), \\ &\quad r > R + \delta, \\ T^f(r, \xi) &= T_m + \frac{1}{\sqrt{r^*}} \exp \left( -\frac{\beta}{2} r^* \xi \right) \\ &\quad \times \sum_{n=0}^{\infty} \left[ F_n K_{n+\frac{1}{2}} \left( \frac{\beta}{2} r^* \right) + G_n I_{n+\frac{1}{2}} \left( \frac{\beta}{2} r^* \right) \right] P_n(\xi), \\ &\quad R < r < R + \delta, \quad \xi < 0, \quad (10) \end{aligned}$$

где  $K_{n+\frac{1}{2}}(x)$ ,  $I_{n+\frac{1}{2}}(x)$  — функции Бесселя мнимого аргумента;  $\beta = VR/a$ ;  $a = k/\rho c_p$ .

Плотность, теплоемкость и теплопроводность среды в твердой и жидкой фазах считаем одинаковыми. Произвольные постоянные  $E_n$ ,  $F_n$  и  $G_n$  определяются граничными условиями

$$T^s(R + \delta, \xi) = T^f(R + \delta, \xi) = T_m,$$

$$T^f(R, \xi) = T^c(R, \xi). \quad (11)$$

Ограничиваясь главными членами асимптотических выражений функций Бесселя

$$K_{n+\frac{1}{2}}(x) = \left( \frac{\pi}{2x} \right)^{1/2} \exp(-x),$$

$$I_{n+\frac{1}{2}}(x) = \frac{1}{(2\pi x)^{1/2}} [\exp(x) - (-1)^n \exp(-x)],$$

имеем

$$T^s(r, \xi) = T_m \frac{1 + \delta^*}{r^*} \exp \left[ -\frac{\beta}{2} (r^* - 1 - \delta^*) (1 + \xi) \right],$$

$$r > R + \delta,$$

$$T^f(r, \xi) = T_m + \frac{h}{c_p} \frac{S(\xi)}{r^*} \frac{1 - \exp[-\beta(1 + \delta^* - r^*)]}{1 - \exp(-\beta\delta^*)}$$

$$\times \exp \left[ -\frac{\beta}{2} (r^* - 1) (1 + \xi) \right],$$

$$R < r < R + \delta, \quad \xi < 0. \quad (12)$$

Из граничного условия

$$-k \frac{\partial T^f}{\partial r}(R + \delta, \xi) = \pm h_m \rho V \xi - k \frac{\partial T^s}{\partial r}(R + \delta, \xi), \quad (13)$$

где  $\pm h_m \rho V \xi$  — количество тепла, затраченное на плавление среды перед тепловым источником и выделенное

обратно при отвердевании позади него, получаем уравнение границы между фазами при  $\xi < 0$

$$(1 + \delta^*)[D + (3D - 1)\xi] + \frac{2D}{\beta} = \frac{S(\xi)}{1 - \exp(-\beta\delta^*)} \exp\left[-\frac{\beta}{2}\delta^*(1 + \xi)\right],$$

$$D = \frac{c_p T_m}{2h} \quad (14)$$

и выражение потока тепла из расплава в твердую фазу при  $\xi > 0$

$$-k \frac{\partial T^f}{\partial r}(R + \delta, \xi) = \frac{kh}{c_p R} [(1 - D)\beta\xi + D(\beta + 2)]. \quad (15)$$

Распределение температуры в расплаве перед тепловым источником найдем параметрическим методом теории пограничного слоя. Интегрируя уравнение теплопроводности

$$v_r \frac{\partial T^f}{\partial y} + v_\Theta \frac{\partial T^f}{\partial \Theta} = \frac{\alpha}{R} \frac{\partial^2 T^f}{\partial y^2}$$

по толщине слоя и учитывая уравнение неразрывности

$$\sin \Theta \frac{\partial v_r}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \Theta}(v_\Theta \sin \Theta) = 0,$$

получаем интегральное соотношение

$$\left[ \int_0^{\delta^*} v_\Theta T^f \sin \Theta dy \right]' + VT_m [\xi - (1 - \xi^2)\delta^{*'}] = -\frac{\alpha}{R} \left[ \frac{\partial T^f}{\partial y}(\delta, \xi) - \frac{\partial T^f}{\partial y}(0, \xi) \right]. \quad (16)$$

Аппроксимируем  $T^f$  квадратичным относительно  $y$  трехчленом, коэффициенты которого определяются условиями (11) и (15),

$$T^f(y, \xi) = T_m + \frac{h}{c_p} \left(1 - \frac{y}{\delta^*}\right) \times \left\{ S + y \left[ D(\beta + 2) + (1 - D)\beta\xi - \frac{S}{\delta^*} \right] \right\}. \quad (17)$$

Соотношение (16) с учетом (5) и (17) дает дифференциальное уравнение для  $\delta$

$$\frac{1 - \xi^2}{20} \left[ D(\beta - 8) + (1 - D)\beta\xi + \frac{5}{6}S \right] \delta^{*'} = \varphi - \frac{S}{\beta\delta^*},$$

$$\varphi = D \left(1 + \frac{2}{\beta}\right) + (1 - D)\xi - \frac{3}{40}[(1 - \xi^2)S]', \quad (18)$$

откуда с точностью до главного члена следует

$$\delta^* = \frac{S}{\beta\varphi}. \quad (19)$$

Штрихом обозначены производные по  $\xi$ . С помощью (8) и (19) приводим уравнение (7) к виду

$$S(1) = \frac{9}{2} \frac{\gamma\beta(\beta + 2D)^3}{[S'(1)]}, \quad \gamma = \frac{\alpha\eta}{gR^3(\rho_1 - \rho)}. \quad (20)$$

Из (12) и (14) находим

$$-k \frac{\partial T^f}{\partial r}(R, \xi) = \begin{cases} \frac{kh\beta}{c_p R} \left\{ D \left(1 + \frac{2}{\beta}\right) + (1 - D)\xi - \frac{3}{20}[(1 - \xi^2)S]' \right\}, & \xi \geq 0 \\ \frac{kh\beta}{c_p R} \left\{ \left(\frac{1 + \xi}{2} + \frac{1}{\beta}\right) S + \left[ (1 + \delta^*)(D + 3D\xi - \xi) + \frac{2D}{\beta} \right] \times \exp\left[-\frac{\beta}{2}\delta^*(1 - \xi)\right] \right\}, & \xi < 0. \end{cases} \quad (21)$$

Для определения постоянных  $C_n$  имеем граничное условие

$$k_c \frac{\partial T^c}{\partial r}(R, \xi) = k \frac{\partial T^f}{\partial r}(R\xi). \quad (22)$$

В предельном случае  $\beta = 0, \delta = 0$  из (14) и (19) следует  $S = 0$  и  $C_n = 0$ , т.е. получаем стационарное решение для неподвижного контейнера при температуре  $T_m$  на поверхности. Поток тепла (21) во всех направлениях сводится к  $kT_m/R$ . Согласно (4) и (22), радиус такого контейнера равен

$$R_0 = \left( \frac{3kT_m}{q\zeta^3} \right)^{1/2}. \quad (23)$$

Таким образом, процесс "самозахоронения" возможен при условии  $R > R_0$ . С увеличением  $R$  экспонента в (21) быстро уменьшается, поэтому в дальнейшем соответствующим слагаемым пренебрегаем. Максимум допускаемой при этом погрешности в определении скорости погружения равен ее значению  $V_0$ , которое получится при  $R = R_0$ . Умножая (22) на  $P_n(\xi)$  и интегрируя по  $\xi$  от  $-1$  до  $+1$ , получим бесконечную систему уравнений

$$\frac{4n\chi}{(2n + 1)\beta} C_n + \sum_{k=0}^{\infty} C_k \left\{ \frac{3}{10} P_k(0) P_n(0) + \frac{n}{2n + 1} \left[ \frac{3}{10}(n + 1) - (-1)^{k+n} \right] \Psi_{k,n-1} - \frac{n + 1}{2n + 1} \left[ \frac{3}{10}n + (-1)^{k+n} \right] \Psi_{k,n+1} + (-1)^{k+n} \left(1 + \frac{2}{\beta}\right) \Psi_{k,n} \right\} = \frac{\chi}{2} \frac{\zeta}{\beta} \int_{-1}^1 P_n(\xi) d\xi - \frac{3}{2\nu} Q_n,$$

$$Q_n = D \left( 1 + \frac{2}{\beta} \right) \Psi_{0,n} + (1 - D) \Psi_{1,n},$$

$$\Psi_{k,n} = \int_0^1 P_k(\xi) P_n(\xi) d\xi, \quad \chi = \frac{k_i}{k}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (24)$$

Ограничимся конечным числом  $N$  постоянных  $C_n$  и первыми  $N$  уравнениями. При  $N = 2$  имеем

$$\begin{aligned} C_0 &= \frac{3}{\nu} \frac{\Delta_0}{\Delta}, \quad C_1 = -\frac{3}{\nu} \frac{\Delta_1}{\Delta}; \\ S(1) &= \frac{4}{3} \nu (C_0 + C_1), \quad S'(1) = \frac{4}{3} \nu C_1; \\ \Delta_0 &= \frac{2}{3} \chi \zeta \nu \left( 1 + 2\chi \Gamma_1 + \frac{19}{80} \beta \right) - \frac{1}{2} (7 + 8\chi \Gamma_1) D \\ &\quad - \left[ 1 + \frac{59}{40} D + \chi \Gamma_1 (1 + D) \right] \beta - \frac{1}{480} (97 + 77D) \beta^2, \\ \Delta_1 &= \chi \zeta \nu \left( -1 + \frac{1}{30} \beta \right) + 6D \\ &\quad + \frac{1}{20} (35 + 47D) \beta + \frac{1}{40} (15 + 7D) \beta^2, \\ \Delta &= 1 + 8\chi \Gamma_1 + \frac{1}{20} (43 + 64\chi \Gamma_1) \beta + \frac{119}{300} \beta^2. \end{aligned} \quad (25)$$

Параметр  $\beta$  находится из уравнения

$$\Delta_0 - \Delta_1 = \frac{\Delta}{4} S(1), \quad (26)$$

где, согласно (20),

$$S(1) = \frac{9\chi}{32} \left( \frac{\Delta}{\Delta_1} \right)^2 \beta (\beta + 2D)^3. \quad (27)$$

Так как  $S(1) \ll 1$ , уравнение (26) сводится к квадратному. При  $R > R_0$  оно имеет один положительный корень

$$\begin{aligned} \beta(\nu) &= \frac{1}{277 + 161D} \{ [36L^2 + (277 + 161D)M]^{1/2} - 6L \}, \\ L &= 110 + 153D + 40\chi \Gamma_1 (1 + D) - 5\chi \zeta \nu, \\ M &= \frac{1}{3} \chi \zeta \nu (5 + 4\chi \Gamma_1) - \frac{1}{2} (19 + 8\chi \Gamma_1) D, \end{aligned} \quad (28)$$

определяющий зависимость скорости погружения от радиуса, мощности теплового источника и физических характеристик среды. Согласно (2), максимальная температура будет на луче  $\xi = -1$  в точке

$$r_m^* = -4 \frac{\zeta^2}{\Omega_1} C_1 \quad (29)$$

и равна

$$\begin{aligned} T^i(r_m^*, -1) &= T_m + \frac{h\nu}{6c_p} \left[ 1 + 2 \frac{k_i}{k_c} (1 - \zeta) \right. \\ &\quad \left. + \frac{r_m^*}{\zeta} (r_m^* + 2\Omega_1) \right]. \end{aligned} \quad (30)$$

Контейнер имеет наибольшую температуру в верхней критической точке на внутренней стороне стенки

$$T^c(R_i, -1) = T_m + \frac{4}{3} \frac{h\nu}{c_p} \left[ \frac{k_i}{4k_c} (1 - \zeta) + \left( 1 + \frac{\zeta}{\Omega_1} \right) C_0 \right]. \quad (31)$$

Приравнявая ее температуре плавления контейнера  $T_*$ , находим максимально допустимое значение параметра  $\nu$

$$\begin{aligned} \nu_* &= \frac{3}{G} \left\{ \left( 1 + \frac{\zeta}{\Omega_1} \right) \right. \\ &\quad \left. \times [876D + (277 + 161D)\beta_*] - S_*(445 + 464\chi \Gamma_1) \right\}, \\ G &= 180\chi \zeta \left( 1 + \frac{\zeta}{\Omega_1} \right) - \frac{k_i}{k_c} (445 + 464\chi \Gamma_1) (1 - \zeta), \\ S_* &= \frac{c_p}{h} (T_* - T_m). \end{aligned} \quad (32)$$

Подставляя его в (26), получаем квадратное уравнение для соответствующего значения  $\beta = \beta_*$ . Согласно определению этих параметров, максимальные радиус и скорость погружения находятся по формулам

$$R_* = \frac{1}{\zeta} \left( \frac{hk_i}{c_p q} \nu_* \right)^{1/2}, \quad V_* = \frac{a}{R_*} \beta_*. \quad (33)$$

При  $N > 2$  задача требует численного решения.

Рассмотрим случай "самозащиты" в гранит РАО в контейнере из высокотемпературной керамики NbC при  $q = 130\,000 \text{ W/m}^3$ . Для физических постоянных

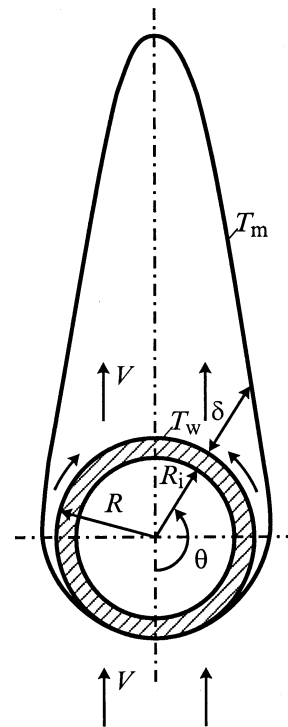


Рис. 1. Физическая модель и геометрия задачи.

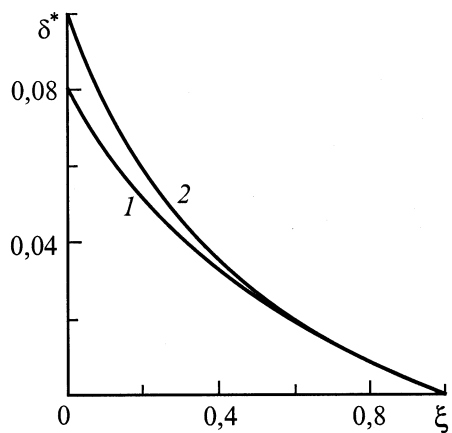


Рис. 2. Толщина зоны расплава при  $\xi > 0$ .

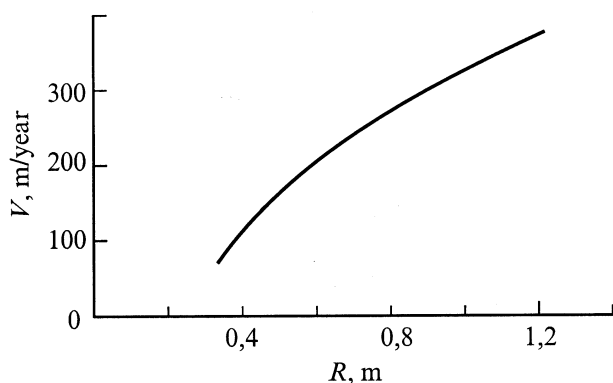


Рис. 3. График зависимости скорости погружения от радиуса контейнера при  $\zeta = 0.9$ .

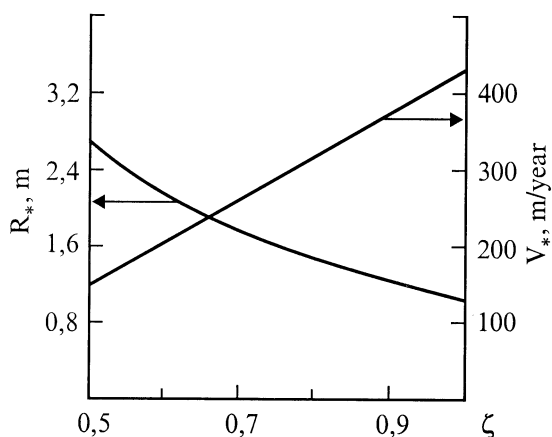


Рис. 4. Графики зависимости максимальных радиуса и скорости от параметра  $\zeta$ .

принимая следующие значения (в системе СИ) [4]:  
 $\rho = 2700$ ,  $c_p = 1301$ ,  $k = 3.013$ ,  $h_m = 585800$ ,  
 $T_m = 1200^\circ\text{C}$ ,  $\eta = 10$ ;  $\rho_c = 7820$ ,  $k_c = 44$ ,  $T_* = 3480^\circ\text{C}$ ;  
 $\rho_i = 7800$ ,  $k_i = 36$ .

При  $\zeta = 0.9$  получаем  $R_* = 1.221$  м,  $V_* = 376.28$  м/год,  
 $S(1) = 0.855 \cdot 10^{-4}$ ,  $S'(1) = -0.684$ ,  $\delta^*(1) = 0.359 \cdot 10^{-5}$ ,  
 $\delta^*(-1) = 4.012$ .

В точке  $\xi = 0$  выражения (14) и (19) дают достаточно близкие значения  $\delta^*(-0) = 0.092$  и  $\delta^*(+0) = 0.099$ . В точке  $\xi = 1$  контейнер находится в непосредственном контакте с твердой средой и имеет температуру, превышающую точку ее плавления на  $0.14^\circ\text{C}$ . Максимальная температура внутри контейнера в точке  $r_m^* = 0.639$ ,  $\xi = -1$  равна  $3540.96^\circ\text{C}$ . Зона расплава и расчетная модель течения показаны на рис. 1. На рис. 2 кривая 1 соответствует границе зоны расплава в области  $\xi > 0$ , определяемой уравнением (18), а кривая 2 — приближенной формулой (19). На участке  $0.5 < \xi \leq 1$  они практически совпадают. Максимальная разница между ними при  $\xi = 0$  составляет 0.019. Поскольку движение контейнера в основном зависит от условий в окрестности  $\xi = 1$ , то точность формулы (19) вполне удовлетворительна. Формула (6) с учетом (19) дает  $J = 139.04 \cdot 10^6$ , а по приближенной формуле (8) эта величина на 0.05% больше. Согласно (23), радиусу  $R_0 = 0.338$  м соответствует нулевая скорость погружения. На рис. 3 показана зависимость  $V(R)$ , определяемая формулой (28). При радиусе  $R_0$  она дает значение  $V_0 = 68.39$  м/год, которое представляет собой максимум погрешности, обусловленной пренебрежением экспоненциальным членом в выражении (21). С увеличением параметра  $\zeta$  от 0.5 до 1 радиус  $R_*$  уменьшается от 2.683 до 1.025 м, а скорость  $V_*$  увеличивается приблизительно по линейному закону от 150.08 до 429.94 м/год (рис. 4). Сравнение с результатами работы [2] при  $\zeta = 1$  показывает, что учет потока тепла и обратного тепловыделения при отвердевании расплава в области  $\xi < 0$  увеличивает  $R_*$  на 0.298 м и уменьшает  $V_*$  на 44 м/год. Зона расплава позади контейнера становится длиннее в 1.5 раз.

Полученные результаты от выбора числа  $N$  зависят слабо. Так, при  $N = 10$  значения  $R_*$  и  $V_*$  увеличиваются на 1.53 и 0.51%, а при  $N = 100$  — на 1.62 и 0.56% соответственно.

## Список литературы

- [1] Emerman S.H., Turcotte D.L. // Intern. J. Heat and Mass Transfer. 1983. Vol. 26. P. 1625–1630.
- [2] Косачевский Л.Я., Сюю Л.С. // ЖТФ. 1994. Т. 64. Вып. 6. С. 7–15.
- [3] Косачевский Л.Я., Сюю Л.С. // Геоэкология. 1995. Вып. 1. С. 96–102.
- [4] Таблицы физических величин. Справочник / Под ред. И.К. Кикоина. М.: Атомиздат, 1976. 1008 с.