01;03;04

# Подход нелокальной гидродинамики при описании классической бесстолкновительной плазмы

© О.Ю. Динариев

Институт физики Земли им. О.Ю. Шмидта РАН,
123810 Москва, Россия

(Поступило в Редакцию 18 декабря 1995 г.)

По аналогии с подходом, развитым ранее для нейтрального газа, показано, что для определенного класса внешних источников линейная кинетическая теория невырожденной бесстолкновительной плазмы эквивалентна гидродинамическому описанию, в котором материальные соотношения нелокальны в пространстве и во времени. Исследованы общие алгебраические свойства ядер нелокальности. Указана схема вычисления их явного выражения через интеграл вероятности. Рассмотрена динамика слабых возмущений состояния покоя и показано, что результаты нелокальной гидродинамической модели соответствуют эффектам, полученным в рамках других теорий.

## Введение

Известно, что кинетическое описание газа в определенном классе внешних воздействий эквивалентно гидродинамическому описанию, при котором материальные соотношения нелокальны в пространстве и времени [1–4]. Соответствующие ядра нелокальности вычисляются с помощью интеграла столкновений. Метод перехода от кинетической теории к нелокальной гидродинамике распространяется и на физику плазмы. Как и для газа, в определенном классе внешних источников этот переход является точным, поскольку по решению гидродинамической задачи можно восстановить решение исходного кинетического уравнения. При этом случай бесстолкновительной плазмы выделен тем, что оказывается возможным вычислить фурье-образы ядер нелокальности в специальных функциях. Поэтому для бесстолкновительной плазмы нелокальное гидродинамическое описание является максимально конструктивным, насколько это вообще возможно. В большинстве других случаев теория позволяет лишь установить определенные свойства ядер, а в конкретных вычислениях приходится использовать для них приближенные или модельные выражения.

Используется система единиц измерения, в которой скорость света в вакууме $c$, постоянная Планка $\hbar$ и постоянная Больцмана $k$ равны единице. Единицы измерения электромагнитных величин определяются в соответствии с подходом Гаусса. Греческие индексы принимают значения 0, 1, 2, 3, соответствуя некоторой инерциальной системе отсчета $x^\alpha$ ($x^\alpha$ — время). Латинские индексы $a$, $b$, $c$ приобретают значения 1, 2, 3 и соответствуют пространственным координатам. Латинские индексы $A$, $B, C, D$ пробегают значения $0, \ldots, (k+3)$, где $k$ — число компонентов плазмы. По повторяющимся индексам производится суммирование, если не оговорено противное. Для произвольной функции $g = g(x^\alpha)$ будем обозначать $g(k)$ ее фурье-образ

$$g_F = g_F(k_\alpha) = \int \exp\Big(-ik_\alpha x^\alpha\Big) g(x^\alpha) dx^\alpha.$$

## Нелокальные гидродинамические уравнения для бесстолкновительной плазмы

При кинетическом описании состояние системы характеризуется одночастичной функцией распределения $f = f(x^\alpha, v^b, r)$, где $v^a$ — скорость частиц; $r$ — собирательный параметр, соответствующий внутренние степени свободы (например, номер компонента, вращательные и колебательные движения и др.). В пространстве параметров $(v^a, r)$ вводится мера $d\zeta = dv^1 dv^2 dv^3 d\mu(r)$, с помощью которой можно производить усреднение микроскопических величин. Так, если имеется функция микроскопических параметров $W = W(v^a, r)$, то можно вычислить макроскопическое поле

$$w = w(x^\alpha) = \langle W \rangle = \int W(v^a, r)\, f(x^\alpha, v^i, r)\, d\zeta.$$

Рассмотрим $K$-компонентную бесстолкновительную плазму. В этом случае параметр $r$ имеет составной вид $(i, r')$, где $i$ пробегает значения $1, \ldots, K$, соответствующие номерам компонентов, а параметр $r'$ связан с другими внутренними степенями свободы. Интегрирование по мере $d\mu(r)$ распадается на суммирование по параметру $i$ и интегрирование по некоторой мере $d\zeta'(r')$. Примем далее, что индексы $i$, $j$ пробегают значения $1, \ldots, K$, а индексы $I$, $J$ пробегают значения $(3+i)$, $i = 1, \ldots, K$. Если индексы $i$, $j$ и индексы $I$, $J$ используются в одной формуле, их значения связаны равенствами $I = i + 3$, $J = j + 3$.

Обозначим через $m_i$ и $e_i$ массу и заряд частицы $i$-го компонента, $U(r)$ — потенциальная энергия возможных состояний частицы. Определим наборы функций $J_A(v^a, r)$, $\Sigma^\alpha(v^a, r)$, $\Phi^\alpha(v^a, r)$ следующими формулами, в которых суммирование по $i$ не производится

$$J_0(v^a, r) = \frac{1}{2} m_i v^b v^b + U(r),$$

$$J_a(v^b, r) = m_i v^a, \qquad J_J(v^b, r) = \delta_{ij},$$

$$\Sigma^0(v^a, r) = e_i m_i^{-1}, \qquad \Sigma^a(v^b, r) = e_i m_i^{-1} v^a,$$
$$\Phi^0(v^a, r) = e_i, \quad \Phi^a(v^b, r) = e_i v^a, \quad r = (i, r').$$

Динамика плазмы описывается уравнением Власова

$$\partial_0 f + v^a \partial_a f + \Psi^a D_a f = S \tag{1}$$

и системой уравнений Максвелла

$$\varepsilon_{abc}\partial_b E_c = -\partial_0 B_a, \quad \partial_a B_a = 0,$$
$$\varepsilon_{abc}\partial_b B_c = 4\pi j^a + \partial_0 E_a, \qquad \partial_a E_a = 4\pi j^0. \tag{2}$$

В уравнении (1) приняты обозначения $\partial = \partial/\partial x^\alpha$; $D = \partial/\partial v^a$; $S = S(x^\alpha, v^b, r)$ — функция источников, описывающая взаимодействие плазмы с внешней средой; $\Psi^a$ — сила Лоренца, определяемая с помощью векторов электрического $E_a$ и магнитного $B_a$ полей

$$\Psi^a = \Sigma^0 E_a + \varepsilon_{abc}\Sigma^b B_c.$$

Традиционно уравнение Власова записывают (1) с нулевой правой частью, неявно подразумевая постановку задачи Коши. Уравнение (1) с источниками более общее, оно охватывает задачу Коши как частный случай.

Электрический 4-ток $j^\alpha$ распадается на сумму внешнего тока $j^\alpha_{\mathrm{ex}}$ и индуцированного тока $j^\alpha$

$$j^\alpha = j^\alpha_{\mathrm{ex}} + j^\alpha_{\mathrm{in}}, \qquad j^\alpha_{\mathrm{in}} = \langle \Phi^\alpha \rangle. \tag{3}$$

Для совместности системы уравнений Максвелла (2) необходимо условие сохранения полного тока

$$\partial_\alpha j^\alpha = 0. \tag{4}$$

Условие (3) будем интерпретировать как ограничение на внешний 4-ток $j^\alpha_{\mathrm{ex}}$. Из уравнения (1) следуют уравнения гидродинамики

$$\partial_\alpha Q^\alpha_A = s_A + E_a L^a_A + B_a M^a_A,$$
$$Q^0_A = Q^0_A(x^\beta) = \langle J_A \rangle, \qquad Q^a_A = Q^a_A(x^\beta) = \langle v^a J_A \rangle,$$
$$s_A = s_A(x^\alpha) = \int J_A(v^b, r) S(x^\alpha, v^b, r)\, d\zeta,$$
$$L^a_A = \langle \Sigma^0 D_a J_A \rangle, \qquad M^a_A = -\varepsilon_{abc}\langle \Sigma^b D_c J_A \rangle. \tag{5}$$

Очевидно, что величины $L^a_1$, $M^a_1$, $M^a_0$ равны нулю. В отсутствие электромагнитного поля и источников кинетическое уравнение (1) удовлетворяется в классе равновесных состояний

$$f_e = f_e(v^a, r) = \exp(F^A J_A), \tag{6}$$

$$F^0 = -\beta, \qquad F^a = \beta u^a, \qquad F^I = \beta \mu_i, \tag{7}$$

где $\beta$ — обратная температура, $u^a$ — скорость среды, $\mu_i = (\mu_{i0} - (1/2) m_i u^a u^a)$ — динамический химический потенциал.

Для того чтобы равновесное состояние удовлетворяло в отсутствие внешних токов уравнениям Максвелла (2), нужно наложить на параметры (7) дополнительное условие электронейтральности

$$\langle \Phi^\alpha \rangle_e = 0. \tag{8}$$

Равновесное состояние покоя $f_0 = f_0(v^a, r)$ характеризуется тем, что скорость среды $u^a$ в (6), (7) равна нулю. Отметим, что в состоянии покоя

$$L^a_A = \langle \Sigma^0 D_a J_A \rangle_0 = 0, \quad M^a_A = -\varepsilon_{abc}\langle \Sigma^b D_c J_A \rangle_0 = 0. \tag{9}$$

Гидродинамическим уравнениям (5) можно придать более традиционный вид, если переобозначить гидродинамические 4-токи $Q^\alpha_A$ через другие величины. Введем в рассмотрение плотности частиц $n_i = Q^0_I$, массовую плотность $\rho = \Sigma m_i n_i$, среднемассовую скорость $u^a = \rho^{-1} Q^0_a$, диффузионные потоки $d^a_i = (Q^a_1 - n_i u^a)$, кинетическую энергию среды $K_* = (1/2)\rho u^a u^a$, внутреннюю энергию среды $U_* = Q^0_0 - (1/2)\rho u^a u^a$, тензор напряжений $p^{ab} = (\rho u^a u^b - Q^a_b)$ и вектор потока тепла $q^a = Q^a_0 + p^{ab} u^b - (U_* + K_*) u^a$. Подчеркнем, что новое определение скорости среды $u^a$ согласовано со старым для равновесных состояний (6), (7). Тогда система (5) может быть переписана так:

$$\partial_0(U_* + K_*) + \partial_a\big(q^a - p^{ab}u^b + (U_* + K_*)u^a\big) = s_0 + E_a L^a_0,$$
$$\partial_0(\rho u^a) + \partial_a(-p^{ab} + \rho u^a u^b) = s_b + E_a L^a_b + B_b M^a_A,$$
$$\partial_0 n_i + \partial_a(d^a_i + n_i u^a) = s_1.$$

Обсудим определение тензора вязких напряжений. Для равновесных состояний (6), (7) тензор напряжений сводится к шаровому $p^{ab} = -p\delta^{ab}$. При этом в классе равновесных состояний давление $p$ можно выразить как функцию внутренней энергии $\varepsilon$ и плотностей $n_i$. С помощью этой функциональной связи распространим определение давления на неравновесные состояния. Тогда тензор вязких напряжений вычисляется по формуле

$$\tau^{ab} = p^{ab} + p\delta^{ab}.$$

Рассмотрим динамику слабых возмущений состояния покоя. Пусть $g^\alpha_A = \Delta Q^\alpha_A$ — линейные возмущения гидродинамических 4-токов. С учетом (9) уравнения (5) приводятся к виду

$$\partial_\alpha g^\alpha_A = s_A. \tag{10}$$

Для замыкания задачи (2), (10) необходимо иметь материальные соотношения, т. е. выражения для 3-токов $g^a_A$ (или, что то же, выражения для вязких напряжений $\tau^{ab}$ и потока тепла $q^a$), а также выражение для индуцированного 4-тока $j^\alpha_{\mathrm{in}}$ через компоненты $g^0_A$ и электромагнитное поле. Эти выражения можно получить, исследуя кинетическую задачу (1).

Пусть равновесное распределение покоя $f_0$ возмущается слабыми источниками $S$. Примем обычное представление для возмущенного распределения $f = f_0(1 + \varphi)$. Линеаризуя (1), получаем

$$(\partial_0 + v^a \partial_a)\varphi = \beta E_a \Phi^a + s, \; s = f_0^{-1} S. \tag{11}$$

Функции $\varphi$, рассматриваемые с точки зрения зависимости от аргументов $v^a$, $r$, принадлежат гильбертову пространству $H$ со скалярным произведением

$$(\varphi_1, \varphi_2) = \int f_0 \varphi_1^* \varphi_2 \, d\zeta .$$

Обозначим через $H_h$ подпространство, натянутое на семейство векторов $J_A$, через $H_a$ — ортогональное дополнение к $H_h$: $H = H_h \otimes H_a$. Как легко убедиться, вследствие (7) выполнены равенства $(J_A, \Phi^a) = 0$ и потому функции $\Phi^a$ лежат в $H_a$. С другой стороны, $\Phi^0 = \Sigma e_i J_I$, и потому функция $\Phi^0$ лежит в $H_h$.

В подпространстве $H_h$ определен метрический тензор $\gamma_{AB} = (J_A, J_B)$, с помощью которого можно опускать и поднимать индексы $A$, $B$. Отличны от нуля следующие компоненты метрики: $\gamma_{00}$, $\gamma_{ab} = \sigma\delta_{ab}$, $\xi_I = \gamma_{0I} = \gamma_{I0}$, $\xi_I = \gamma_{II}$ (суммирование по $I$ не производится!).

Как легко убедиться, вследствие (7) выполнены равенства $(J_A, \Phi^a) = 0$, и потому функция $\Phi^a$ лежат в $H_a$. С другой стороны, $\Phi^0 = \Sigma e_i J_I$, и потому функция $\Phi^0$ лежит в $H_h$.

Перейдем в уравнениях (2), (11) к фурье-образам

$$G\varphi_F = s_F + \beta E_{aF} \Phi^a, \quad G = ik_0 + ik_a v^a, \tag{12}$$

$$\varepsilon_{abc} ik_b E_{cF} = -ik_0 B_{aF}, \qquad ik_a B_{aF} = 0, \tag{13}$$

$$\varepsilon_{abc} ik_b B_{cF} = 4\pi j_F^a + ik_0 E_{aF}, \quad ik_a E_{aF} = 4\pi j_F^0. \tag{14}$$

Введем вспомогательные операторы $P_h : H \to H_h$, $P_a : H \to H$ — проекторы, $I_h : H_h \to H$, $I_a : H_a \to H$ — вложения, $G_{hh} = P_h G I_h$,

$$G_{ah} = P_a G I_h, \quad G_{ha} = P_h G I_a, \quad G_{aa} = P_a G I_a.$$

Искомую функцию $\varphi$ удобно разбить на "гидродинамическую" $h = P_h \varphi$ и "негидродинамическую" $a = P_a \varphi$ части. При разложении по базису в $H_h$ получаем компоненты $h_A = (J_A, h)$. Несложно вычислить возмущения гидродинамических 4-токов

$$g_A^0 = (J_A, \varphi) = h_A, \quad g_A^a = (J_A v^a, \varphi). \tag{15}$$

Примем теперь по аналогии с [1–4], что источники $s$ в уравнении (10) как функции параметров $v^a$, $r$ принадлежат пространству $H_h$ и, следовательно, полностью характеризуются компонентами $s_A$. Это — ключевое предположение метода перехода от кинетики к гидродинамике, предложенного в [1–4]. Как легко видеть, из (11) вытекает система уравнений

$$G_{hh} h_F + G_{ha} a_F = s_F ,$$

$$G_{ah} h_F + G_{aa} a_F = \beta E_{aF} \Phi^a .$$

Из последнего уравнения можно выразить $a$ как функцию $h$ и электрического поля

$$a_F = E_{aF} \beta G_{aa}^{-1} \Phi^a - G_{aa}^{-1} G_{ah} h_F . \tag{16}$$

Для корректного определения оператора $G_{aa}^{-1}$ необходимо произвести подстановку $k_0 \to (k_0 - i\varepsilon)$, где $\varepsilon$ — бесконечно малая положительная величина. Введем матрицы

$$Z_{AB}^a = (v^a J_A, J_B), \qquad R_{AB}^{ab} = (P_a v^a J_A, G_{aa}^{-1} P_a v^b J_B).$$

Теперь, используя соотношения (3), (15), (16), можно найти материальные соотношения

$$g_{AF}^a = \left( Z_{AB}^a - ik_b R_{AB}^{ab} \right) h_F^B + \beta \sum_j e_j R_{AJ}^{ab} E_{bF} , \tag{17}$$

$$j_{\text{in}F}^0 = \sum_i e_i h_{IF} , \tag{18}$$

$$j_{\text{in}F}^a = \sum_i e_i \left( \beta \sum_j e_j R_{IJ}^{ab} E_{bF} - ik_b R_{IB}^{ab} h_F^B \right). \tag{19}$$

Поскольку коэффициентные функции $R_{AB}^{ab}$ неполиномиально зависят от волнового 4-вектора $k_\alpha$, то гидродинамическая модель оказывается нелокальной в пространстве и времени.

Материальные соотношения (17)–(19) замыкают задачу (2), (10). Переход к гидродинамической задаче является точным. Если известно некоторое решение этой задачи, то из (15), (16) можно найти компоненты $h$, а функции распределения и восстановить решение задачи в кинетической постановке.

Матрица $R_{AB}^{ab}$, характеризующая нелокальность теории, удовлетворяет ряду общих условий. Так, очевидно, что для действительного 4-вектора $k_\alpha$

$$R_{AB}^{ab}(k_\beta)^* = R_{AB}^{ab}(-k_\beta). \tag{20}$$

Хотя функции $J_A$ по определению линейно независимы, набор функций $J_A$, $v^a J$ является линейно зависимым. Вообще говоря, из каждого тождества вида

$$\lambda^A J_A + \Lambda_a^A v^a J_A = 0, \tag{21}$$

где $\lambda^A$, $\Lambda_a^A$ — постоянные коэффициенты, следуют соотношения

$$\Lambda_a^A R_{AB}^{ab} = 0, \qquad \Lambda_b^B R_{AB}^{ab} = 0. \tag{22}$$

Легко указать одно тождество вида (21)

$$\sum_i m_i v^a J_I - J_a = 0. \tag{23}$$

Если отсутствуют внутренние степени свободы $r'$, то имеется еще одно тождество

$$v^a J_a - 2J_0 = 0. \tag{24}$$

Обозначим $\nu = k_a k_a$. Используя формулу Сохоцкого–Племеля, несложно получить соотношение

$$R_{AB}^{ab} + R_{BA}^{ba*} = \left( P_a v^a J_A, \left( G_{aa}^{-1} + G_{aa}^{-1+} \right) P_a v^a J_B \right)$$

$$= 2\pi \nu^{-1/2} \left( P_a v^a J_A, \delta\left( k_0 + k_c v^c \right) P_a v^b J_B \right).$$

Отсюда следует, что для любого ненулевого набора комплексных величин $C_a^A$ выполняется неравенство

$$\left(R_{AB}^{ab} + R_{BA}^{ba*}\right) C_a^{A*} C_b^B > 0. \tag{25}$$

Из определений следует, что коэффициенты функции $R_{AB}^{ab}$ продолжаются по аналитичности по параметру $k_0$ в нижнюю комплексную полуплоскость. Разобьем $k_0$ на комплексную и мнимую части: $k_0 = \omega_1 + i\omega_2$, $\omega_2 \leqslant 0$. Тогда имеем

$$R_{AB}^{ab} + R_{BA}^{ab*} = \Big(P_a v^a J_A, \Lambda\big(k_\alpha, v^c\big) P_a v^b J_B\Big),$$

$$\Lambda = -2\omega_2 \left(\omega_2^2 + \left(\omega_1 + k_c v^c\right)^2\right)^{-1}.$$

Отсюда видно, что неравенство (25) выполняется во всей полуплоскости $\omega_2 \leqslant 0$.

Обсудим следствия обратимости процессов на микроуровне. Пусть $I$ — оператор обращения времени в пространстве $H$ [1–4]. Оператор $I$ меняет знак скоростей частиц $Iv^a I = -v^a$. Интегралы $J_A$ и состояние $f_0$ являются собственными функциями оператора $I$

$$IJ_a = \varepsilon_A J_A, \qquad \varepsilon_A = \pm 1, \qquad I f_0 = f_0,$$

где $\varepsilon_0 = \varepsilon_I = 1$, $\varepsilon_a = -1$.

Отсюда следуют условия взаимности (аналог соотношений Онзагера)

$$R_{AB}^{ab}(k_0, k_c) = \varepsilon_A \varepsilon_B R_{BA}^{ba}(k_0, -k_c). \tag{26}$$

Из (17) непосредственно вытекает представление для вязких напряжений, потока тепла и диффузионных потоков

$$\tau_F^{ab} = ik_c R_{bB}^{ac} h_F^B - \beta \sum_j e_j R_{bJ}^{ac} E_{cF},$$

$$q_F^a = -ik_b R_{0B} h_F + \beta \sum_j e_j R_{0J} E_{bF},$$

$$d_{iF}^a = -ik_b R_{IB}^{ab} h_F + \beta \sum_j e_j R_{IJ}^{ab} E_{bF}.$$

Из (23), (22) для диффузионных потоков следует естественный результат $\sum\limits_i d_{IF}^a = 0$. При отсутствии внутренних степеней свободы из (22), (24) следует отсутствие обьемной вязкости $\tau_F^{aa} = 0$.

## Вычисление ядер нелокальности

Как уже отмечалось ранее, для бесстолкновительной плазмы можно вычислить зависимость коэффициентов функций $R_{AB}^{ab}$ от 4-вектора $k_\alpha$. Заметим, что выполнено равенство

$$P_a v^a J_A = v^a J_A - Z_A^{aB} J_B, \qquad Z_A^{aB} = Z_{AC}^a \gamma^{BC}. \tag{27}$$

Рассмотрим функции набора параметров $\xi^A$

$$\varphi = \varphi(\xi^A) = \exp(\xi^A J_A),$$

$$U^{ab} = U^{ab}(\xi^A) = \Big(\varphi, \left(k_0 - i\varepsilon + k_c v^c\right)^{-1} v^a v^b\Big),$$

$$V^a = V^a(\xi^A) = \Big(\varphi, \left(k_0 - i\varepsilon + k_c v^c\right)^{-1} v^a\Big),$$

$$W = W(\xi^A) = \Big(\varphi, \left(k_0 - i\varepsilon + k_c v^c\right)^{-1}\Big),$$

$$H_{AB}^{ab} = H_{AB}^{ab}(\xi^A) = \frac{\partial^2 U^{ab}}{\partial \xi^A \partial \xi^B} - Z_B^{bC} \frac{\partial^2 V^a}{\partial \xi^A \partial \xi^C} - Z_A^{aC} \frac{\partial^2 V^b}{\partial \xi^B \partial \xi^C} + Z_A^{aC} Z_B^{bD} \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^C \partial \xi^D}.$$

Используя равенство (27) и определение коэффициентов $R_{AB}^{ab}$, несложно убедиться, что величины $R_{AB}^{ab}$ вычисляются через функцию

$$H_{AB}^{ab} = H_{AB}^{ab}(\xi^A) : R_{AB}^{ab} = i^{-1} H_{AB}^{ab}\Big|_{\xi^A = 0}.$$

Таким образом, задача свелась к вычислению функций $U^{ab}$, $V^a$, $W$. Решение этой последней чисто технической задачи приведено в Приложении (П1).

Как легко видеть, при $k_a = 0$ для коэффициентов функций получается простое выражение

$$R_{AB}^{ab} = (ik_0)^{-1} \left(P_a v^a J_A, P_a v^b J_B\right). \tag{28}$$

Набор коэффициентов $R_{AB}^{ab}(k_\alpha)$ удобно разложить по базису величин $I_{AB}^{abn}(k_c)$, полиномиально зависящих от волнового вектора $k_a$ и удовлетворяющих условию $I_{AB}^{abn}(k_c)^* = I_{AB}^{abn}(-k_c)$

$$R_{AB}^{ab}(k_\alpha) = I_{AB}^{abn}(k_c) X_n(k_\alpha). \tag{29}$$

Здесь $X_n(k_\alpha)$ — скалярные функции, которые в силу (20) удовлетворяют условию $X_n(k_\alpha)^* = X_n(-k_\alpha)$. Поэтому они являются фурье-образами некоторых действительных ядер $Y_{nF} = X_n$. Явный вид разложения (29) приведен в Приложении (П2).

## Динамика свободных колебаний

Рассмотрим задачу о свободных колебаниях плазмы. Из (10), (13), (14) получаем систему уравнений

$$ik_\alpha g_{AF}^\alpha = 0, \tag{30}$$

$$\varepsilon_{abc} ik_b E_{cF} = -ik_0 B_{aF}, \qquad ik_a B_{aF} = 0, \tag{31}$$

$$\varepsilon_{abc} ik_b B_{cF} = 4\pi j_{\mathrm{in}\,F}^a + ik_0 E_{aF}, \qquad ik_a E_{aF} = 4\pi j_{\mathrm{in}\,F}^0. \tag{32}$$

Отметим, что в силу условия электронейтральности (8) выполнено равенство

$$\sum_i e_i Z_{IA}^a = 0.$$

Поэтому $j_{\mathrm{in}}^\alpha = \sum\limits_i e_i g_I^\alpha$ и условие совместности (4) уравнений Максвелла (31), (32) автоматически следует из (30). Поскольку в материальные соотношения (17)–(19) магнитное поле не входит, то достаточно исследовать систему уравнений (29) и уравнение на электрическое поле, вытекающее из (31), (32)

$$i(4\pi k_0)^{-1}(k_0^2 E_{aF} - \nu E_{af} + k_a k_b E_{bF}) + j^a_{\mathrm{in}\,F} = 0. \quad (33)$$

Будем интерпретировать (30), (33) как систему линейных уравнений на набор неизвестных величин $h^A_F$, $E_{aF}$. Пусть $A = (A_{nm})$ — матрица системы. Как условие существования нетривиального решения, получаем дисперсионное уравнение

$$\det A = 0. \quad (34)$$

Аналитические выражения для функций $R^{ab}_{AB}$, полученные в П 1. Приложения, позволяют искать комплексные решения $k_\alpha$. Будем считать, что задан действительный волновой вектор $k_a$. Тогда уравнение (34) задает набор частот $k_0$ собственных колебаний плазмы в зависимости от волнового числа. Матрица $A$ как функция частоты $k_0$ аналитически продолжается в нижнюю комплексную полуплоскость $\mathrm{Im}\,k_0 \leqslant 0$ с выколотой точкой $k_0 = 0$. Пусть $C^n$ — произвольный ненулевой набор комплексных величин. Используя (25), (17), (19), легко убедиться, что в нижней комплексной полуплоскости с выколотой точкой выполняется неравенство

$$\mathrm{Re}\,(A_{nm}C^{n*}C^m) > 0.$$

Таким образом, при $\mathrm{Im}\,k_0 \leqslant 0$ уравнение (34) решений не имеет, или, иными словами, в рамках нелокального гидродинамического описания все собственные колебания бесстолкновительной плазмы затухают.

От правой части уравнения (34) отфакторизовывается множитель $Q_t(k_\alpha)^2$, соответствующий поперечным волнам. Для этих волн

$$h^0 = h^1 = 0, \quad k_a h^a_F = 0, \quad k_a E_{aF} = 0.$$

Функцию $Q_t(k_\alpha)$ можно выразить через скалярные функции $X_n$, используя представление (П2)

$$Q_t = q_1 q_4 - q_2 q_3,$$

$$q_1 = ik_0\sigma + \nu X_8, \;\; q_2 = -\nu\beta\sum_j e_j X_{10\,J}, \;\; q_3 = \nu\beta\sum_i e_i X_{11\,I},$$

$$q_4 = i(4\pi k_0)^{-1}(k_0^2 - \nu) + \beta\sum_i e_i e_j X_{13\,IJ}.$$

Рассмотрим теперь динамику длинноволновых колебаний, связанных с продольным электрическим полем. В этом случае $E_{aF} = -ik_a\varphi(k_\alpha)$. Из (30), (32) получается система уравнений

$$0 = ik_0\gamma_{AB}h^B_F + ik_a Z^a_{AB}h^B_F + k_a k_b R^{ab}_{AB}h^B_F + k_a k_b\beta\sum_j e_j R^{ab}_{AJ}\varphi,$$

$$\nu\varphi = 4\pi\sum_i e_i h_{IF}.$$

В пределе $k_a \to 0$ с помощью формулы (28) отсюда получается уравнение для $\varphi$

$$0 = (-k_0^2 + \omega_L^2)\varphi, \quad \omega_L^2 = 4\pi\beta(\Phi^1, \Phi^1).$$

Это дает обычный спектр ленгмюровских колебаний $k_0 =^+_- \omega_L + 0(\nu)$.

Таким образом, предлагаемое нелокальное гидродинамическое описание воспроизводит результаты, полученные ранее на основе других подходов [5,6].

## Заключение

В настоящей работе показано, что в определенном классе источников нелокальное гидродинамическое описание точно соответствует кинетическому описанию. Это отличает предлагаемый подход от других гидродинамических схем. Решая нелокальную гидродинамическую задачу, можно быть уверенным, что каждому гидродинамическому процессу точно соответствует некоторый кинетический процесс. Исследование ограничивалось рамками линейной теории. На самом деле это ограничение не является существенным. Метод просто обобщается на нелинейный случай, когда источники в уравнении (1) не обязательно являются слабыми. Конечно, в последнем случае функциональная форма материальных соотношений сильно усложняется.

Отметим, что представление (29), (П2) не связано с тем, что рассматривалась бесстолкновительная плазма. Оно будет справедливо, например, и для столкновительной плазмы. Для длинных волн ($k_a \to 0$) и медленных процессов ($k_0 \to 0$) можно выделить в разложении (П2) члены, соответствующие обычной вязкости, теплопроводности и диффузии. Однако, как видно из формулы (28), при взятии последовательного предела $k_a \to 0$, $k_0 \to 0$ выражения для соответствующих коэффициентов переноса оказываются бесконечными.

## Приложение

**1**. В настоящем разделе вычислены функции $U^{ab} = U^{ab}(\xi^A)$, $V^a = V^a(\xi^A)$, $W = W(\xi^A)$. Напомним, что интеграл в смысле главного значения

$$N = V.p.\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^{-1}\exp(-\alpha x^2 + \beta x)dx, \quad \alpha > 0 \quad (\text{П1})$$

вычисляется через специальную функцию — интеграл вероятности

$$\Phi(x) = 2\pi^{-1/2}\int\limits_0^x \exp(-t^2)\,dt.$$

Необходимые выкладки приведены, например, в [5]. Результат вычисления следующий: $N = \pi\Theta(\beta 2^{-1}\alpha^{-1/2})$, где $\Theta(z) = i^{-1}\Phi(iz)$.

Рассмотрим подробно процедуру вычисления функции $W(\xi^A)$ при $\nu = k_a k_a \neq 0$. Положим $e_1^a = \nu^{-1/2} k_a$, пусть $e_2^a$, $e_3^a$ — два других единичных вектора, таких что все три вектора $e_b^a$ образуют ортогональный базис $e_b^a e_c^a = \delta_{bc}$. Осуществляя подстановку $v^a = e_b^a w^b$, приводим выражение для функции $W(\xi^A)$ к виду

$$W(\xi^A) = \nu^{-1/2} \sum_i (\Omega - i\varepsilon + w^1)^{-1}$$

$$\times \exp\left(-\frac{1}{2} A_1 w^b w^b + b_i^b w^b + C_i\right) dw^1 dw^2 dw^3 d\zeta'(r'),$$

$$A_i = (-\beta + \xi^0) m_i, \quad b_i^a = B_i^b e_b^a, \quad B_i^a = \xi^a m_i,$$

$$C_i = (-\beta + \xi^0) U(i, r') + \beta \mu_{i0} + \xi^1, \quad \Omega = k_0 \nu^{-1/2}.$$

Интегрирование по $w^2$, $w^3$ сводится к взятию гауссовских интегралов. Интеграл по $w^1$ с помощью формулы Сохоцкого–Племеля и сдвига аргумента приводится к интегралу (П1). Окончательно получаем

$$W = \sum_i \int \Psi(i, r') d\zeta'(r'),$$

$$\Psi(i, r') = \nu^{-1/2} \pi (2\pi / A_i)$$

$$\times \exp\Big(C_i + B_i^a (\delta_{ab} - \nu^{-1} k_a k_b) B_i^b / (2A_i)\Big)$$

$$\times \exp\left(-\Big(\frac{1}{2} A_i k_0^2 + B_i^a k_a k_0\Big) \nu^{-1}\right)$$

$$\times \left(\Theta\Big((B_i^a k_a + A_i k_0) \nu^{-1/2} / (2A_i)^{1/2}\Big) + i\right).$$

Аналогичным образом могут быть вычислены и функции $U^{ab} = U^{ab}(\xi^A)$, $V^a = V^a(\xi^A)$. Они могут быть представлены в компактном виде

$$U^{ab} = \sum_i \int \Psi^{ab}(i, r') d\zeta'(r'),$$

$$V^a = \sum_i \int \Psi^a(i, r') d\xi'(r'),$$

$$\Psi^{ab}(i, r') = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial B_i^a \partial B_i^b}, \qquad \Psi^a(i, r') = \frac{\partial \Psi}{\partial B_i^a}.$$

**2**. Чисто алгебраическая структура коэффициентов $R_{AB}^{ab}$ позволяет выписать разложение вида (28), инвариантное относительно группы вращений. При этом следует иметь в виду условия симметрии

$$R_{cA}^{ab} = R_{aA}^{cb}, \qquad R_{Ac}^{ab} = R_{Ab}^{ac}$$

условия взаимности (26). Достаточно выписать представление (28) для компонент $R_{00}^{ab}$, $R_{0c}^{ab}$, $R_{0I}^{ab}$, $R_{cd}^{ab}$, $R_{cI}^{ab}$, $R_{IJ}^{ab}$

$$R_{00}^{ab} = \delta_{ab} X_0 + k_a k_b X_1,$$

$$R_{0c}^{ab} = R_{0b}^{ac} = i k_a \delta_{bc} X_2 + (i k_b \delta_{ac} + i k_c \delta_{ab}) X_3 + i k_a k_b k_c X_4,$$

$$R_{0I}^{ab} = \delta_{ab} X_{5I} + k_a k_b X_{6I},$$

$$R_{cd}^{ab} = \delta_{ac} \delta_{bd} X_7 + (\delta_{ab} \delta_{cd} + \delta_{cb} \delta_{ad}) X_8 + \delta_{ac} k_b k_d X_7$$

$$+ (k_a k_b \delta_{cd} + k_c k_b \delta_{ad} + k_a k_d \delta_{cb} + k_c k_d \delta_{ab}) X_8$$

$$+ k_a k_b k_c k_d X_9,$$

$$R_{cI}^{ab} = (i k_a \delta_{bc} + i k_c \delta_{ab}) X_{10I} + i k_b \delta_{ac} X_{11I} + i k_a k_b k_c X_{12I},$$

$$R_{IJ}^{ab} = \delta_{ab} X_{13IJ} + k_a k_b X_{14IJ}. \qquad (\Pi 2)$$

## Список литературы


[1] *Динариев О.Ю.* // ЖЭТФ. 1994. Т. 106. Вып. 1. (7). С. 161–171.
[2] *Динариев О.Ю.* // Изв. вузов. Физика. 1995. № 2. С. 95–99.
[3] *Динариев О.Ю.* // Акуст. журн. 1995. Т. 41. № 3. С. 415–420.
[4] *Динариев О.Ю.* // ЖЭТФ. 1995. Т. 107. Вып. 6. С. 1877–1894.
[5] *Ахиезер А.И., Ахиезер И.А., Половин Р.В.* и др. Электродинамика плазмы. М.: Наука, 1974. 720 с.
[6] *Александров А.Ф., Богданкевич Л.С., Рухадзе А.А.* Колебания и волны в пламенных средах. М.: Изд-во МГУ, 1990. 272 с.