О затухании обобщенных волн Свихарта

© А.С. Малишевский, В.П. Силин, С.А. Урюпин

Физический институт им. П.Н. Лебедева Российской академии наук,
117924 Москва, Россия

E-mail: malish@sci.lebedev.ru

(Поступила в Редакцию 29 сентября 1998 г.
В окончательной редакции 17 ноября 1998 г.)

Для джозефсоновских переходов в геометрии сэндвича и тонкой пленки сформулированы уравнения нелокальной электродинамики, в которых учтено влияние нормальных электронов в сверхпроводниках. На основе этих уравнений изучены спектр и затухание обобщенных волн Свихарта. Установлено, что затухание волн на нормальных электронах проявляется особенно ярко в коротковолновой области. Сравнение различных механизмов диссипации позволило выявить условия эффективного излучения электромагнитных волн из джозефсоновских структур конечных размеров.

Свойства волн Свихарта привлекают постоянное внимание с момента их предсказания в начале шестидесятых годов [1]. Интерес к этим волнам обусловлен исследованиями спектральных свойств как одиночных джозефсоновских переходов (см., например, [2–4]), так и слоистых джозефсоновских структур [5]. Обычные волны Свихарта описываются уравнением Клейна–Гордона–Фока с диссипацией

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\varphi - v_s^2\frac{\partial^2}{\partial z^2}\varphi + \omega_j^2\varphi = -\beta\frac{\partial}{\partial t}\varphi + \alpha\frac{\partial^3}{\partial t\partial z^2}\varphi, \quad (1)$$

где $\varphi = \varphi(z,t)$ — разность фаз волновых функций куперовских пар по разные стороны перехода,

$$v_s \equiv c\sqrt{d/\varepsilon\lambda} \quad (2)$$

— скорость Свихарта, а

$$\omega_j \equiv \left(\frac{16\pi}{\hbar\varepsilon}|e|d\,j_c\right)^{1/2}$$

— джозефсоновская частота. При этом j_c — критическая плотность джозефсоновского тока, e — заряд электрона, $2d$ — толщина перехода, ε — диэлектрическая проницаемость несверхпроводящего слоя, $\hbar$ — постоянная Планка, c — скорость света, λ — лондоновская длина. В правой части уравнения (1) стоят слагаемые, описывающие диссипацию волн Свихарта. Слагаемое, содержащее

$$\beta \equiv 4\pi\sigma/\varepsilon,$$

описывает диссипацию в несверхпроводящем слое с проводимостью σ, а слагаемое, содержащее

$$\alpha \equiv \frac{2\pi}{\varepsilon}\sigma_n\lambda d = \frac{4\pi\sigma_n}{\varepsilon}\left(\frac{2d}{\lambda}\right)\frac{\lambda^2}{4},$$

описывает диссипацию в сверхпроводниках с проводимостью нормальных электронов σ_n. При пренебрежении диссипацией уравнение (1) дает для спектра волн Свихарта соотношение

$$\omega^2 = \omega_j^2 + k^2 v_s^2.$$

Учет малых диссипативных слагаемых в правой части (1) приводит к следующему выражению для декремента затухания

$$\gamma = \frac{\beta}{2} + \frac{\alpha}{2}k^2. \quad (3)$$

С увеличением длины волны $2\pi/k$ второе слагаемое в (3) убывает. Поэтому для достаточно длинных волн, когда

$$\frac{1}{R_n} \equiv \frac{\sigma_n}{\lambda}\left(\frac{1}{2}k\lambda\right)^2 \ll \frac{\sigma}{2d} \equiv \frac{1}{R_\sigma}, \quad (4)$$

влияние нормальных электронов на затухание волн Свихарта пренебрежимо мало. В (4) использованы обозначения для удельных сопротивлений единицы площади сверхпроводника R_n и перехода R_σ. Величина R_n (4) зависит от лондоновской длины λ. Отметим, что в тех случаях, когда глубина проникновения поля в сверхпроводник отличается от λ, выражение R_n содержит λ_{eff} или λ_e (см. далее).

Уравнение (1) описывает джозефсоновские переходы в рамках локальной электродинамики. Развитие описания джозефсоновских структур в рамках нелокальной электродинамики [6–21] позволило выявить условия, при которых возникает необходимость в нелокальном описании волновых свойств переходов. В частности, согласно работе [11] (см. также [10,12]), для джозефсоновского перехода между массивными сверхпроводниками локальное описание становится непригодным тогда, когда характерный масштаб $L_\varphi \equiv |\partial \ln\varphi/\partial z|^{-1}$ пространственного изменения разности фаз мал по сравнению с лондоновской длиной $L_\varphi \ll \lambda$. Для перехода в тонкой сверхпроводящей пленке с толщиной D, когда эффективная глубина проникновения статического магнитного поля λ_e значительно превышает лондоновскую длину [22]

$$\lambda_e \equiv \lambda^2/D \gg \lambda,$$

адекватное описание свойств перехода возможно лишь в рамках нелокальной электродинамики [8,9,13,14,17,20]. Пространственная нелокальность приводит к замене уравнения (1) на интегральное по пространственным переменным. Еще одна причина нелокальности электродинамики джозефсоновских переходов связана с возможностью высвечивания волн Свихарта как из тонкой пленки, так и из сэндвича [21].

Как уже отмечалось, описанию джозефсоновских переходов в рамках нелокальной электродинамики посвящено заметное число работ [6–21]. При этом диссипация электромагнитной энергии связывалась либо с потерями в несверхпроводящем слое [10–14], либо с потерями на излучение волн в вакуум [21]. В отличие от этих работ в [23] в уравнениях нелокальной электродинамики учтена диссипация, связанная с проводимостью нормальных электронов сверхпроводников. Заметим, что уже из соотношений (3), (4) ясно, что с ростом волнового вектора волн Свихарта роль нормальных электронов становится все более и более существенной.

Далее рассматриваются волны Свихарта на основе уравнений нелокальной электродинамики, когда для таких волн используется название обобщенные волны Свихарта. Приводятся результаты исследования спектра таких обобщенных волн и закономерностей их затухания. Изложение материала построено по следующей схеме. Во втором разделе обсуждаются следствия электродинамики Лондонов. Установлено, что при температурах, не слишком близких к T_c (температуре сверхпроводящего перехода), диссипация на нормальных электронах сверхпроводника сравнительно невелика и ее можно описывать, используя разложение (10). В третьем разделе рассмотрены волновые свойства сверхпроводящего сэндвича. Получено нелокальное в пространстве уравнение для разности фаз, учитывающее омические потери энергии в переходе и сверхпроводящих электродах. Рассмотрен спектр обобщенных волн Свихарта и дано описание их затухания. Выявлены условия, при которых определяющую роль играет поглощение волн на нормальных электронах сверхпроводников. В четвертом разделе дано описание радиационного затухания волн Свихарта в области больших длин волн. Приведено сравнение радиационного декремента затухания с вкладами в полный декремент от нормальных электронов, сверхпроводящих электронов и от потерь в переходе. Это позволяет понять, насколько эффективно излучение волн Свихарта из сэндвича. Там же установлены спектр и декремент затухания поверхностных волн. Пятый раздел посвящен теории джозефсоновского перехода в тонкой пленке. В нем получено нелокальное уравнение для разности фаз, которое в отличие от известного [8,9] учитывает влияние нормальных электронов пленки и позволяет выявить их влияние на затухание обобщенных волн Свихарта. В шестом разделе дан вывод соответствующего уравнения для разности фаз, учитывающего как влияние нормальных электронов, так и эффект высвечивания волн из пленки. Последний процесс делает такое уравнение нелокальным по времени. Временная нелокальность возникает также из-за взаимодействия волн Свихарта с поверхностными волнами пленки. Выявлены условия, при которых декремент затухания волн Свихарта определяется радиационными потерями, а затухание из-за влияния нормальных электронов пленки и из-за потерь в переходе сравнительно мало. Иными словами, установлены условия эффективного излучения джозефсоновского перехода в сверхпроводящей пленке.

1. Материальное уравнение электродинамики Лондонов

Плотность электрического тока в сверхпроводнике складывается из плотности сверхпроводящего тока и плотности тока нормальных электронов

$$\mathbf{j}(\mathbf{r},t) = -\frac{c}{4\pi\lambda^2}\left\{\frac{\phi_0}{2\pi}\,\mathrm{grad}\,\Phi(\mathbf{r},t) + \mathbf{A}(\mathbf{r},t)\right\} + \sigma_n\mathbf{E}(\mathbf{r},t), \tag{5}$$

где $\phi_0 \equiv \pi\hbar c|e|^{-1}$ — квант магнитного потока, $\Phi(\mathbf{r},t)$ — фаза волновой функции куперовских пар, $\mathbf{A}(\mathbf{r},t)$ — векторный потенциал, $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ — напряженность электрического поля. В (5) плотность тока нормальных электронов записана в предположении, что характерное время изменения электрического поля велико по сравнению с обратной частотой столкновений нормальных электронов, а характерный пространственный масштаб изменения поля много больше их длины свободного пробега. Принимая во внимание условие калибровочной инвариантности теории (см., например, [24])

$$V(\mathbf{r},t) = \frac{\phi_0}{2\pi c}\frac{\partial}{\partial t}\Phi(\mathbf{r},t),$$

где $V(\mathbf{r},t)$ — скалярный потенциал, выражение (5) для плотности тока перепишем в виде (см., например, [25])

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{j}(\mathbf{r},t) = \left(\frac{c^2}{4\pi\lambda^2} + \sigma_n\frac{\partial}{\partial t}\right)\mathbf{E}(\mathbf{r},t). \tag{6}$$

Переходя к фурье-образам по времени, из (6) получаем

$$\mathbf{j}(\mathbf{r},\omega) = \frac{\omega}{4\pi i}\varepsilon(\omega)\mathbf{E}(\mathbf{r},\omega), \tag{7}$$

где динамическая диэлектрическая проницаемость $\varepsilon(\omega)$ описывается выражением

$$\varepsilon(\omega) = -\frac{c^2}{\omega^2\lambda_*^2} \equiv -\frac{c^2}{\omega^2\lambda^2} + i\frac{4\pi}{\omega}\sigma_n. \tag{8}$$

Принимая во внимание связь лондоновской длины с n_s (плотностью числа сверхпроводящих электронов),

$$\lambda^2 = mc^2/4\pi e^2 n_s$$

и проводимости σ_n с n_s (плотностью числа нормальных электронов),

$$\sigma_n = e^2 n_n/m\nu,$$

где m — эффективная масса электронов, ν — их частота столкновений, из (8) имеем

$$\varepsilon(\omega) = -\frac{4\pi e^2}{m\omega^2} n_s (1 - i\omega\tau), \tag{9}$$

где $\tau \equiv n_n/\nu n_s$ — характерное время релаксации поля. При температурах сверхпроводника T, меньших критической T_c, отношение n_n к n_s убывает с понижением температуры (см., например, [25])

$$\frac{n_n}{n_s} \simeq \frac{T_c}{2(T_c - T)} - 1, \quad T_c - T \ll T_c,$$

$$\frac{n_n}{n_s} \simeq \left(2\pi\frac{\Delta}{T}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{\Delta}{T}\right), \quad T \ll T_c,$$

где Δ — ширина энергетической щели при $T = 0$, $\Delta \sim T_c$. Кроме того, в рамках применимости соотношения (5) $\omega \ll \nu$. Это означает, что при температурах сверхпроводника, не слишком близких к критической, мнимая часть диэлектрической проницаемости (8), (9) мала по сравнению с действительной. В этих условиях для комплексной лондоновской длины λ_* можно использовать приближенное соотношение

$$\lambda_* \equiv \lambda(1 - i\omega\tau)^{-1/2} \simeq \lambda\left(1 + \frac{i}{2}\omega\tau\right). \tag{10}$$

В соответствии с материальными уравнениями (7), (8) при последующем рассмотрении электродинамики сверхпроводников достаточно заменить λ на λ_*.

2. Медленные волны в сэндвиче

Рассмотрим джозефсоновский переход в сэндвиче, образованном двумя одинаковыми сверхпроводящими электродами толщиной L, разделенными несверхпроводящим слоем толщиной $2d$ с диэлектрической проницаемостью ε и проводимостью σ. Считая, что переход характеризуется вещественной диэлектрической проницаемостью $\varepsilon > 0$ и проводимостью σ, далее отвлечемся от обсуждения неомических потерь энергии в нем. Следуя работе [15], с учетом связи плотности тока с электрическим полем (6) и разложения (10), для разности фаз волновых функций электродов имеем уравнение

$$\omega_j^2 \sin\varphi(z,t) + \beta\frac{\partial}{\partial t}\varphi(z,t) + \frac{\partial^2}{\partial t^2}\varphi(z,t) = \hat{L}[\varphi(z,t)]$$
$$\equiv \frac{\partial^2}{\partial z^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dz' Q(z-z')\varphi(z',t)$$
$$- \tau\frac{\partial^3}{\partial t\partial z^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dz' Q_n(z-z')\varphi(z',t), \tag{11}$$

где ядра интегральных слагаемых описываются выражениями

$$\begin{Bmatrix} Q(z) \\ Q_n(z) \end{Bmatrix} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \exp(ikz) \begin{Bmatrix} Q(k,\lambda) \\ Q_n(k,\lambda) \end{Bmatrix}, \tag{12}$$

$$Q(k,\lambda) \equiv \frac{v_s^2}{\lambda}\lambda(k)\,\mathrm{th}\left[\frac{L}{\lambda(k)}\right], \tag{13}$$

$$Q_n(k,\lambda) \equiv \frac{\lambda}{2}\frac{\partial}{\partial\lambda}Q(k,\lambda), \tag{14}$$

$$\lambda(k) \equiv \lambda/\sqrt{1 + k^2\lambda^2}. \tag{15}$$

Если толщина электродов L много больше лондоновской длины, то ядра (12) интегральных слагаемых в (11) принимают вид (ср. [23])

$$Q(z) = \frac{v_s^2}{\pi\lambda}K_0\left(\frac{|z|}{\lambda}\right), \tag{16}$$

$$Q_n(z) = \frac{v_s^2}{\pi\lambda}\left[\frac{|z|}{2\lambda}K_1\left(\frac{|z|}{\lambda}\right) - K_0\left(\frac{|z|}{\lambda}\right)\right], \tag{17}$$

где $K_\nu(x)$ — функция Макдональда, а скорость v_s имеет вид (2). В случае, когда характерный пространственный масштаб изменения разности фаз L_φ значительно превосходит лондоновскую длину, соотношения (16), (17) позволяют представить правую часть уравнения (11) в локальном виде

$$\hat{L}[\varphi(z,t)] = v_s^2\frac{\partial^2}{\partial z^2}\varphi(z,t) + \frac{1}{2}v_s^2\tau\frac{\partial^3}{\partial t\partial z^2}\varphi(z,t). \tag{18}$$

При этом, естественно, уравнение (11) сводится к известному (1) (см., например, [3,4]) в локальной электродинамике джозефсоновских переходов. В противоположном предельном случае, когда $L_\varphi \ll \lambda$, используя соотношения (16), (17), для интегрального оператора $\hat{L}[\varphi]$ находим

$$\hat{L}[\varphi(z,t)] = \frac{v_s^2}{\pi\lambda}\left(1 + \tau\frac{\partial}{\partial t}\right)\text{V.P.}$$
$$\times \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dz'}{z'-z}\frac{\partial}{\partial z'}\varphi(z',t), \tag{19}$$

где интеграл по z' понимается в смысле главного значения. По существу, несодержащие зависимости от толщины сверхпроводящих электродов соотношения (16)–(19) относятся к электродинамике джозефсоновских переходов в массивных сверхпроводниках. Зависимость ядер $Q(z)$ и $Q_n(z)$ от L может проявляться в случае тонких электродов, когда $L \ll \lambda$. Тогда для описания распределений разности фаз, имеющих масштабы, меньшие лондоновской длины $L_\varphi \ll \lambda$, из (12)–(14) находим

$$Q(z) = -Q_n(z) = \frac{v_s^2}{\pi\lambda}\ln\left[\mathrm{cth}\left(\frac{\pi|z|}{4L}\right)\right].$$

В свою очередь интегральный оператор в (11) принимает вид

$$\hat{L}[\varphi(z,t)] = \frac{\upsilon_s^2}{2\lambda L}\left(1+\tau\frac{\partial}{\partial t}\right) \text{V.P.}$$

$$\times \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dz'}{\text{sh}\left[\frac{\pi(z-z')}{2L}\right]} \frac{\partial}{\partial z'}\varphi(z',t), \qquad (20)$$

где отличие от работы [15] связано с учетом диссипации. Очевидно, что при $L_\varphi \ll L$ выражение (20) переходит в (19). Еще одна возможность проявления конечной толщины электродов реализуется при $L_\varphi \gg \lambda \gg L$. В этих условиях функционал $\hat{L}[\varphi]$ имеет вид

$$\hat{L}[\varphi(z,t)] = \upsilon_{sL}^2\left(1+\tau\frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial^2}{\partial z^2}\varphi(z,t). \qquad (21)$$

Основное отличие (21) от (18) состоит в изменении скорости Свихарта, которая в случае тонких электродов зависит от эффективной длины $\lambda_{\text{eff}} \equiv \lambda^2/L \gg \lambda$

$$\upsilon_{sL} \equiv c\sqrt{d/\varepsilon\lambda_{\text{eff}}} \ll \upsilon_s.$$

Воспользуемся уравнениями (11)–(14) для описания линейных волн в сэндвиче. Соответствующее дисперсионное уравнение выглядит сравнительно просто

$$\omega^2 + i\beta\omega = \omega_j^2 + k^2 Q(k,\lambda) + i\omega\tau k^2 Q_n(k,\lambda), \qquad (22)$$

где фурье-компоненты ядер $Q(k,\lambda)$ и $Q_n(k,\lambda)$ описываются выражениями (13), (14). Полагая $\omega \equiv \omega' - i\gamma$, где $\gamma \ll \omega'$, для действительной части частоты из (22) имеем [19]

$$\omega'^2 = \omega_j^2 + k^2\upsilon_s^2\frac{\lambda(k)}{\lambda}\,\text{th}\left[\frac{L}{\lambda(k)}\right]. \qquad (23)$$

Далее, учитывая в (22) мнимые поправки, получаем декремент затухания обобщенных волн Свихарта, имеющих закон дисперсии (23)

$$\gamma = \gamma_d + \gamma_n. \qquad (24)$$

Слагаемое γ_d в (24) описывает затухание волн, обусловленное омическими потерями энергии в джозефсоновском переходе,

$$\gamma_d = \beta/2 = 2\pi\sigma/\varepsilon. \qquad (25)$$

Слагаемое γ_n в (24) связано с потерями энергии в сверхпроводящих электродах, определяющимися рассеянием нормальных электронов,

$$\gamma_n = -\frac{\tau}{4}(k\lambda)^2\upsilon_s^2\frac{\partial}{\partial\lambda}\left\{\frac{\lambda(k)}{\lambda^2}\,\text{th}\left[\frac{L}{\lambda(k)}\right]\right\}$$

$$\equiv \frac{1}{2}\tau k^2\upsilon_s^2\left[\frac{\lambda(k)}{\lambda}\right]^3\text{th}\left[\frac{L}{\lambda(k)}\right]$$

$$\times\left\{\frac{1}{2}+(k\lambda)^2+\frac{L}{\lambda(k)}\text{sh}^{-1}\left[2\frac{L}{\lambda(k)}\right]\right\}. \qquad (26)$$

Сравним декременты затухания (25) и (26). При $k\lambda \sim 1$ и $L \gg \lambda$ декремент затухания волн в основном обусловлен нормальными электронами, если эффективное удельное сопротивление единицы площади сверхпроводника $R_n \equiv \lambda/\sigma_n \ll R$, где $R \equiv 2d/\sigma$ — сопротивление единицы площади джозефсоновского перехода. Также при $k\lambda \sim 1$, но в случае тонких электродов, когда $L \ll \lambda$, из-за того, что в теорию входит $\lambda_{\text{eff}} \equiv \lambda^2/L \gg \lambda$ и повышается сопротивление R_n, затухание волн определяется нормальными электронами при выполнении более тяжелого условия $R \gg R_n \equiv \lambda_{\text{eff}}/\sigma_n \gg \lambda/\sigma_n$. Отметим также, что при $k\lambda \ll 1$, как видно из (26), декремент затухания на нормальных электронах уменьшается пропорционально $(k\lambda)^2$, а при $k\lambda \gg 1$ усиливается пропорционально $k\lambda$. В диапазоне коротких длин волн, когда $k\lambda \gg 1$, декремент γ определяется нормальными электронами, если $R \gg (2/k\sigma_n)\,\text{cth}\,(kL)$. При этом из (23) и (26) находим

$$\gamma_n = \frac{1}{2}\tau\upsilon_s^2\frac{k}{\lambda}\,\text{th}\,(kL),$$

$$\omega' = \frac{\upsilon_s}{\lambda}\sqrt{k\lambda}\,[\text{th}\,(kL)]^{1/2},$$

$$\frac{\gamma}{\omega'} = 2\pi\sigma_n\frac{\lambda\upsilon_s}{c^2}\,[k\lambda\,\text{th}\,(kL)]^{1/2} \equiv \frac{1}{2}\omega'\tau \ll 1. \qquad (27)$$

Согласно (27), в области коротких длин волн, когда существенно уменьшается фазовая скорость обобщенной волны Свихарта, особенно ярко проявляется затухание волн на нормальных электронах. Однако в рамках применимости основного приближенного соотношения (10) затухание обобщенных волн Свихарта оказывается сравнительно небольшим.

3. Быстрые волны в сэндвиче

Уравнения (11)–(15) пригодны лишь для описания волн с фазовой скоростью, меньшей скорости света. Для рассмотрения быстрых волн с $\omega/k \gg c$ необходимо воспользоваться более общим уравнением для разности фаз, учитывающим возможность высвечивания электромагнитных волн в вакуум. Соответствующее уравнение получается в рамках подхода работы [21], если воспользоваться материальными уравнениями, связывающими плотность тока с полем в сверхпроводниках (6). При этом в отличие от (11)–(15) возникает уравнение нелокальное не только в пространстве, но и во времени

$$\omega_j^2\sin\varphi(z,t) + \beta\frac{\partial}{\partial t}\varphi(z,t) + \frac{\partial^2}{\partial t^2}\varphi(z,t)$$

$$= \hat{L}[\varphi(z,t)]$$

$$\equiv \int\limits_{-\infty}^{\infty} dz' \int\limits_{-\infty}^{\infty} dt' \frac{\partial^2}{\partial z^2}\Big[Q(z-z',t-t')$$

$$-\tau\frac{\partial}{\partial t}Q_n(z-z',t-t')\Big]\varphi(z',t'), \qquad (28)$$

где для ядер интегрального слагаемого имеют место соотношения

$$\begin{Bmatrix} Q(z,t) \\ Q_n(z,t) \end{Bmatrix} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \exp(-i\omega t + ikz) \times \begin{Bmatrix} Q(k,\omega,\lambda) \\ Q_n(k,\omega,\lambda) \end{Bmatrix}, \tag{29}$$

$$Q(k,\omega,\lambda) \equiv \upsilon_s^2 \frac{\lambda(k)}{\lambda} \operatorname{th}\left[\frac{L}{\lambda(k)}\right] \times \frac{\operatorname{cth}\left[\frac{L}{\lambda(k)}\right] - \frac{c^2}{\lambda^2\omega^2}\lambda(k)\psi(k,\omega)}{\operatorname{th}\left[\frac{L}{\lambda(k)}\right] - \frac{c^2}{\lambda^2\omega^2}\lambda(k)\psi(k,\omega)}, \tag{30}$$

$$Q_n(k\omega,\lambda) \equiv \frac{\lambda}{2}\frac{\partial}{\partial\lambda} Q(k,\omega,\lambda), \tag{31}$$

а связанная с возможностью высвечивания волн функция $\psi(k,\omega)$ описывается выражением

$$\psi(k,\omega) \equiv \left[\eta(c^2k^2-\omega^2) - i\eta(\omega^2-c^2k^2)\operatorname{sign}\omega\right] \times \sqrt{|\omega^2/c^2-k^2|}. \tag{32}$$

В (32) $\eta(x)$ — функция Хэвисайда.

Поскольку обычно $\omega_j\lambda \ll c$, то фазовая скорость обобщенных волн Свихарта (см. (23)) превышает скорость света лишь в диапазоне длин волн много больших лондоновской длины, когда $k\lambda \ll 1$. Для описания длинноволновых ($k\lambda \ll 1$) низкочастотных ($\omega\lambda \ll c$) изменений разности фаз вместо (30) можно использовать приближенное соотношение

$$Q(k,\omega,\lambda) \simeq \upsilon_s^2 \operatorname{th}\left(\frac{L}{\lambda}\right)\left[1 - 2i\frac{\omega}{c}\lambda \operatorname{sh}^{-1}\left(\frac{2L}{\lambda}\right)\right], \tag{33}$$

где $\omega \gg ck$. Выражения (31), (33) позволяют представить правую часть уравнения (28) в виде

$$\hat{L}[\varphi(z,t)] = \upsilon_s^2 \operatorname{th}\left(\frac{L}{\lambda}\right)\frac{\partial^2}{\partial z^2}\varphi(z,t) + \left\{\frac{\lambda}{c}\operatorname{ch}^2\left(\frac{L}{\lambda}\right) + \frac{\tau}{2}\operatorname{th}\left(\frac{L}{\lambda}\right) \times \left[1 + \frac{2L/\lambda}{\operatorname{sh}(2L/\lambda)}\right]\right\}\upsilon_s^2 \frac{\partial^3}{\partial t\partial z^2}\varphi(z,t). \tag{34}$$

Подставляя (34) в (28) и заменяя $\sin\varphi$ на аргумент φ, можно видеть, что при $\omega' \gg ck$ закон дисперсии обобщенных волн Свихарта имеет вид

$$\omega'^2 = \omega_j^2 + k^2\upsilon_s^2 \operatorname{th}(L/\lambda). \tag{35}$$

Функция (35) хорошо сшивается с функцией (23), описывающей связь частоты с волновым вектором при $\omega \ll ck$. Декремент затухания быстрых волн состоит из трех частей

$$\gamma = \gamma_d + \gamma_n + \gamma_r. \tag{36}$$

В (36) γ_d описывает затухание из-за потерь энергии в переходе (25). Слагаемое

$$\gamma_n \equiv \frac{\tau}{4}k^2\upsilon_s^2 \operatorname{th}\left(\frac{L}{\lambda}\right)\left[1 + \frac{2L/\lambda}{\operatorname{sh}(2L/\lambda)}\right]$$

обусловлено потерями энергии из-за рассеяния нормальных электронов. Наконец, γ_r описывает затухание волн Свихарта из-за высвечивания в вакуум

$$\gamma_r \equiv \frac{\lambda}{2c}(k\upsilon_s)^2 \operatorname{ch}^{-2}(L/\lambda).$$

В случае толстых электродов выполняется неравенство $L \gg \lambda$ и радиационный декремент затухания экспоненциально мал. Напротив, при $L \ll \lambda$ потери на излучение весьма существенны. В частности, при $L \ll \lambda$ в обсуждаемом здесь пределе больших длин вол ($k\lambda \ll 1$) отношение γ_n/γ_r не зависит от волнового числа

$$\frac{\gamma_n}{\gamma_r} = \frac{c\tau}{\lambda_{\text{eff}}} \equiv \frac{c}{\lambda\nu}\frac{L}{\lambda}\frac{n_n}{n_s}. \tag{37}$$

Для типичных значений $\lambda \sim 3\cdot10^{-5}$ cm и $\nu \sim 10^{15}\,\text{s}^{-1}$ отношение (37) много меньше единицы, если температура электродов заметно меньше критической и $n_n \ll n_s$. Тем самым в этих условиях радиационный декремент затухания превосходит декремент затухания на нормальных электронах. Величина γ_r превосходит и γ_d, если

$$k\lambda \gg \frac{c}{\upsilon_s}\left(\frac{4\pi\sigma\lambda}{\varepsilon c}\right)^{1/2},$$

что сравнительно легко выполнимо (ср. [21]).

В случае толстых электродов, когда $L \gg \lambda$ и радиационные потери пренебрежимо малы, декремент затухания определяется нормальными электронами, если

$$k\lambda \gg \frac{\lambda}{\upsilon_s}\left(\frac{8\pi\sigma}{\varepsilon\tau}\right)^{1/2}.$$

Для полноты картины отметим, что решением уравнения (28) с ядрами вида (29)–(31) являются не только обобщенные волны Свихарта, но и поверхностные электромагнитные волны в сэндвиче. Закон дисперсии этих волн определяется нулями знаменателя ядра (30), а затухание фурье-компонентой ядра (31). Поскольку фазовая скорость поверхностных волн меньше скорости света, то для отыскания их закона дисперсии и затухания имеем уравнение

$$\frac{\omega^2}{c^2}\left(1 + i\omega\tau\frac{\lambda}{2}\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)\frac{\lambda^2}{\lambda(k)}\operatorname{th}\left[\frac{L}{\lambda(k)}\right] = \sqrt{c^2k^2-\omega^2}.$$

Отсюда находим связь частоты ω' с волновым вектором

$$\omega'_s = \frac{c}{\sqrt{2}\lambda^2}\lambda(k)\operatorname{cth}\left[\frac{L}{\lambda(k)}\right] \times \left\{\sqrt{1 + 4k^2\frac{\lambda^4}{\lambda^2(k)}\operatorname{th}^2\left[\frac{L}{\lambda(k)}\right]} - 1\right\}^{1/2} \tag{38}$$

и декремент затухания, обусловленный поглощением на нормальных электронах,

$$\gamma_s = \frac{\tau}{4}c^2\frac{\lambda^4(k)}{\lambda^6}\,\mathrm{cth}^2\left[\frac{L}{\lambda(k)}\right] \times\left\{1+2k^2\lambda^2-\frac{2L}{\lambda(k)}\,\mathrm{csch}\left[\frac{2L}{\lambda(k)}\right]\right\} \times\left\{\frac{1+2k^2\lambda^4\lambda^{-2}(k)\,\mathrm{th}^2[L/\lambda(k)]}{\sqrt{1+4k^2\lambda^4\lambda^{-2}(k)\,\mathrm{th}^2[L/\lambda(k)]}}-1\right\}.$$

Взаимодействие поверхностной волны и волны Свихарта может проявиться при тех волновых числах, при которых близки их фазовые скорости. Полученные выше зависимости частот от волнового вектора (23), (35) и (38) имеют место вдали от точек пересечения дисперсионных кривых.

4. Медленные волны в пленке

Перейдем к рассмотрению джозефсоновского перехода в тонкой пленке, толщина которой D много меньше лондоновской длины. Как известно [22], в этом случае эффективная глубина проникновения поля в пленку составляет $\lambda_e \equiv \lambda^2/D \gg \lambda$. Принимая во внимание наличие нормальных электронов в пленке и используя соотношение (10), при рассмотрении электродинамики пленки необходимо заменить λ_e на

$$\lambda_{e*} \equiv \lambda_e(1-i\omega\tau)^{-1} \simeq \lambda_e(1+i\omega\tau). \qquad (39)$$

Далее, повторяя предложенный в работах [8,9] вывод уравнения для разности фаз, с учетом переопределения λ_e (39) для $\varphi(z,t)$ получаем уравнение вида (11)–(14), в котором фурье-компоненты ядер интегрального оператора описываются выражениями

$$Q(k,\lambda_e) \equiv \upsilon_s^2\frac{8}{\pi}\frac{\lambda}{D}F(2k\lambda_e),$$
$$Q_n(k,\lambda_e) \equiv \lambda_e\frac{\partial}{\partial\lambda_e}Q(k,\lambda_e), \qquad (40)$$

а функционал $F(x)$ имеет вид

$$F(x) \equiv \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{\sqrt{x^2-1}}{1+|x|}, \quad |x| \geq 1;$$

$$F(x) \equiv \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\ln\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{|x|}, \quad |x| \leq 1.$$

Когда пространственный масштаб изменения разности фаз L_φ много меньше λ_e, тогда вместо (40) можно использовать приближенные выражения

$$Q(k,\lambda_e) = -Q_n(k,\lambda_e) = \frac{\upsilon_s^2}{k\lambda},$$

которые позволяют представить интегральные слагаемые в уравнении (11) в виде (19). Если же $L_\varphi \gg \lambda_e$, то

$$Q(k,\lambda_e) \simeq \frac{4}{\pi}\upsilon_s^2\lambda_D\ln\frac{1}{|k\lambda_e|}, \quad Q_n(k,\lambda_e) \simeq \frac{4}{\pi}\upsilon_s^2\frac{\lambda}{D},$$

а оператор $\hat{L}[\varphi]$ принимает вид

$$\hat{L}[\varphi(z,t)] = \frac{4}{\pi}\upsilon_s^2\frac{\lambda_e}{\lambda}\tau\frac{\partial^3}{\partial t\partial z^2}\varphi(z,t) + \frac{2}{\pi}\frac{\lambda_e}{\lambda}\upsilon_s^2\frac{\partial^2}{\partial z^2} \times\int\limits_{-\infty}^{\infty}dz'\,\mathrm{sign}\,(z-z')\left[C+\ln\left(\frac{|z-z'|}{\lambda_e}\right)\right]\frac{\partial}{\partial z'}\varphi(z',t), \quad (41)$$

где $C \simeq 0.577$ — постоянная Эйлера. Как видно из (11) и (41), уравнение для разности фаз, описывающее джозефсоновский переход в пленке, остается нелокальным по координате и при $L_\varphi \gg \lambda_e$. Вместе с тем обусловленное влиянием нормальных электронов первое слагаемое в (41) имеет локальный вид, но в отличие от своего аналога для перехода в массивных сверхпроводниках содержит дополнительный большой множитель $8\lambda_e/\pi\lambda \gg 1$, что обусловлено увеличением эффективной глубины проникновения поля в пленку.

Дисперсионное уравнение для волн, распространяющихся вдоль джозефсоновского перехода в пленке, как и ранее, имеет вид (22), но с новыми ядрами Q и Q_n (40). Это уравнение приводит к известному закону дисперсии обобщенных волн Свихарта [17]

$$\omega'^2 = \omega_j^2 + \frac{8}{\pi}\frac{\lambda_e}{\lambda}k^2\upsilon_s^2F(2k\lambda_e) \qquad (42)$$

и декременту затухания вида (24), где вклад в декремент затухания, обусловленный нормальными электронами, описывается выражением

$$\gamma_n = \frac{2}{\pi}\frac{\lambda_e}{\lambda}\tau\frac{k^2\upsilon_s^2}{4k^2\lambda_e^2-1}\left\{8k^2\lambda_e^2F(2k\lambda_e)-1\right\}. \qquad (43)$$

При $2k\lambda_e \sim 1$ декремент затухания волн Свихарта, связанный с нормальными электронами γ_n (43), превосходит γ_d (25), если $R \gg R_n \equiv \lambda_e/\sigma_n$, где удельное сопротивление R_n превосходит значение R_n для массивных электродов в $\lambda/D = \lambda_e/\lambda \gg 1$ раз. Как и в сэндвиче, в области длинных волн ($2k\lambda_e \ll 1$) декремент γ_n (43) уменьшается $\propto (2k\lambda_e)^2$, а при $2k\lambda_e \gg 1$ усиливается $\propto 2k\lambda_e$. Когда $2k\lambda_e \gg 1$, тогда полный декремент γ (24) определяется нормальными электронами при $R \gg R_n \sim 1/k\sigma_n \ll \lambda_e/\sigma_n$. В области коротких длин волн ($2k\lambda_e \gg 1$) отношение полного декремента затухания $\gamma \sim \gamma_n$ (43) к частоте ω' (42) имеет вид (ср. (27))

$$\frac{\gamma}{\omega'} = 2\pi\sigma_n\frac{\lambda\upsilon_s}{c^2}\sqrt{k\lambda} \equiv \frac{1}{2}\omega'\tau \ll 1. \qquad (44)$$

Из (44) видно, что отношение $\gamma \sim \gamma_n$ к частоте ω' мало.

5. Быстрые волны в пленке

Для рассмотрения быстрых волн в джозефсоновском переходе в тонкой пленке воспользуемся подходом работы [21]. Принимая во внимание материальное уравнение (6), для разности фаз волновых функций получим уравнение вида (28), (29). При этом фурье-компоненты ядер интегрального оператора $\hat{L}[\varphi]$ имеют вид

$$Q(k_z,\omega,\lambda_e)\equiv 4\frac{\lambda}{D}\upsilon_s^2\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dk_x}{2\pi}\frac{1}{k_x^2+k_z^2}\times\left[\frac{\psi}{1+2\psi\lambda_e}-\frac{\omega^2k_x^2/k_z^2}{c^2\psi-2\omega^2\lambda_e}\right],$$

$$Q_n(k_z,\omega,\lambda_e)\equiv\lambda_e\frac{\partial}{\partial\lambda_e}Q(k_z,\omega,\lambda_e),$$

$$\psi\equiv\psi\left(\sqrt{k_x^2+k_z^2},\omega\right), \qquad (45)$$

а интегрирование по k в (29) следует заменить на интегрирование по k_z. Как видно из закона дисперсии (42), фазовая скорость обобщенных волн Свихарта может стать сравнимой со скоростью света лишь при $k\lambda_e\ll 1$, когда частота ω' близка к джозефсоновской ω_j. Это значит, что для изучения быстрых волн с $\omega'\gg ck_z$ можно воспользоваться сравнительно простым приближенным выражением для фурье-компонент ядер

$$Q(k_z,\omega,\lambda_e)\simeq 4\frac{\lambda}{D}k_z^{-2}\upsilon_s^2\left[\frac{k_z^2}{\pi}\ln\frac{c}{|\omega|\lambda_e}-\frac{\omega^2}{\pi c^2}\ln\frac{c}{|\omega|d}-i\frac{\omega|\omega|}{2c^2}\right],$$

$$Q_n(k_z,\omega,\lambda_e)\simeq-\frac{4}{\pi}\frac{\lambda}{D}\upsilon_s^2. \qquad (46)$$

В этом случае оператор $\hat{L}[\varphi]$ имеет вид

$$\hat{L}[\varphi(z,t)]=\frac{4}{\pi}\tau\frac{\lambda_e}{\lambda}\upsilon_s^2\frac{\partial^3}{\partial t\partial z^2}\varphi(z,t)+\frac{2}{\pi}\frac{\lambda}{D}\left(\frac{\upsilon_s}{c}\right)^2\frac{\partial}{\partial t}\,\mathrm{V.P.}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dt'}{t'-t}\frac{\partial}{\partial t'}\varphi(z,t')-\frac{4}{\pi}\frac{d}{\varepsilon D}\ln\frac{\lambda_e}{d}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\varphi(z,t)+\frac{2}{\pi}\frac{\lambda}{D}\upsilon_s^2\times\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\int\limits_{-\infty}^{\infty}dt'\,\mathrm{sign}\,(t-t')\times\left[C+\ln\left(\frac{c|t-t'|}{\lambda_e}\right)\right]\frac{\partial}{\partial t'}\varphi(z,t'). \qquad (47)$$

Первое слагаемое в (47) обусловлено влиянием нормальных электронов, второе интегральное слагаемое возникает из-за высвечивания волн в вакуум, а два последних слагаемых в (47) определяют, в частности, дисперсию быстрых обобщенных волн Свихарта с учетом их взаимодействия с поверхностными волнами в пленке. Влияние поверхностных волн на спектр волн Свихарта проявляется и при $\omega'\ll ck_z$ и приводит к уменьшению квадрата частоты (42) и декремента затухания (25) в

$$\Lambda(k_z)\equiv 1+\frac{4}{\pi}\frac{d}{\varepsilon D}\ln\frac{1}{k_zd}$$

раз. При $\omega'\gg ck_z$, заменяя $\sin\varphi$ на φ, из (28), (29) и (46) имеем

$$\omega'^2=\frac{1}{\Lambda}\left[\omega_j^2+\frac{4}{\pi}\frac{\lambda}{D}k_z^2\upsilon_s^2\ln\left(\frac{c}{\lambda_e\omega_j}\right)\right],$$

где $\Lambda\equiv\Lambda(\omega_j/c)$, и выражение для декремента затухания вида (36), в котором

$$\gamma_d=\beta/2\Lambda,$$

$$\gamma_r=\frac{\lambda}{\Lambda D}\left(\frac{\upsilon_s}{c}\right)^2\omega', \qquad (48)$$

$$\gamma_n=\frac{2}{\pi\Lambda}\tau\frac{\lambda_e}{\lambda}\upsilon_s^2k_z^2. \qquad (49)$$

Из (48) и (49) видно, что отношение радиационного декремента затухания γ_r к декременту затухания на нормальных электронах много больше единицы, если $\omega'\gg ck_z$

$$\frac{\gamma_r}{\gamma_n}=\frac{\pi}{2}\left(\frac{\omega'}{ck_z}\right)^2\frac{1}{\omega'\tau}>\frac{\pi}{2}\left(\frac{\omega'}{ck_z}\right)^2\gg 1.$$

По мере приближения фазовой скорости волн к скорости света γ_r убывает пропорционально $(\omega'^2-c^2k_z^2)\eta(\omega'^2-c^2k_z^2)$, и при больших k_z им можно пренебречь. При этом затухание волн определяется величиной γ_n, если сопротивление перехода достаточно велико $R\gg(\pi/2)R_n/(\lambda_ek_z)^2$, где $R_n\equiv\lambda_e/\sigma_n$.

Параметр τ определяет и затухание поверхностных волн, дисперсионное уравнение для которых следует из условия обращения в нуль знаменателя фурье-компоненты ядра (45)

$$2\frac{\lambda_e}{c}(1-i\omega\tau)\omega^2=\sqrt{c^2k^2-\omega^2},\quad k^2\equiv k_x^2+k_z^2. \qquad (50)$$

Полагая $\omega\equiv\omega_s'-i\gamma_s$, из (50) находим частоту

$$\omega_s'^2=\frac{c^2}{8\lambda_e^2}\left(\sqrt{1+16k^2\lambda_e^2}-1\right) \qquad (51)$$

и декремент затухания

$$\gamma_s=\frac{\tau}{8}\frac{c^2}{\lambda_e^2}\left[\frac{1+8k^2\lambda_e^2}{\sqrt{1+16k^2\lambda_e^2}}-1\right]. \qquad (52)$$

В рамках применимости выражений (51), (52), когда $\omega'\tau\ll 1$, отношение γ_s/ω_s' много меньше единицы.

Таким образом, проведенное рассмотрение позволило получить информацию о влиянии нормальных электронов сверхпроводника на затухание обобщенных волн Свихарта. При этом влияние нормальных электронов особенно существенно для коротких волн. Сравнение различных механизмов затухания позволило установить условия, в которых эффективно происходит излучение волн из джозефсоновского перехода в сэндвиче и из перехода в тонкой пленке.

Работа выполнена в рамках проекта РФФИ (грант № 96-02-17303) при поддержке Научного совета по ВТСП (проект АД № 95008) и государственной поддержке ведущих научных школ (проект № 96-15-96750).

Приложение

При рассмотрении линейных волн в сэндвиче достаточно использовать уравнения (11), (28), в которых разность фаз зависит от одной координаты z, что соответствует выбору направления распространения волны вдоль оси Oz. Вместе с тем для изучения нелинейных двумерных вихревых структур необходимо использовать уравнение для разности фаз, зависящее от двух координат в плоскости перехода. Учитывающее омические потери энергии в джозефсоновском переходе, потери энергии на излучение и малую диссипацию на нормальных электронах, нелокальное во времени и в пространстве двумерное уравнение для разности фаз имеет вид

$$\omega_j^2 \sin\varphi(\mathbf{r}_\parallel, t) + \beta\frac{\partial}{\partial t}\varphi(\mathbf{r}_\parallel, t) + \frac{\partial^2}{\partial t^2}\varphi(\mathbf{r}_\parallel, t)$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{r}_\parallel^2}\int d\mathbf{r}'_\parallel \int\limits_{-\infty}^{\infty} dt' Q(\mathbf{r}_\parallel - \mathbf{r}'_\parallel, t-t')\varphi(\mathbf{r}'_\parallel, t')$$

$$-\tau\frac{\partial^3}{\partial t\partial \mathbf{r}_\parallel^2}\int d\mathbf{r}'_\parallel \int\limits_{-\infty}^{\infty} dt' Q_n(\mathbf{r}_\parallel - \mathbf{r}'_\parallel, t-t')\varphi(\mathbf{r}'_\parallel, t').$$

Здесь $\mathbf{r}_\parallel$ — двумерный вектор в плоскости перехода, а ядра интегральных слагаемых описываются выражениями

$$\begin{Bmatrix} Q(\mathbf{r}_\parallel, t) \\ Q_n(\mathbf{r}_\parallel, t) \end{Bmatrix} = \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^2}$$

$$\times \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi}\exp(-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r}_\parallel)\begin{Bmatrix} Q(\mathbf{k}, \omega, \lambda) \\ Q_n(\mathbf{k}, \omega, \lambda) \end{Bmatrix},$$

в которые входят фурье-образы ядер вида (30)–(32). При этом в (30)–(32) следует положить $k = \sqrt{k_y^2 + k_z^2}$, где k_y и k_z — компоненты волнового вектора в плоскости перехода.

Список литературы

[1] J.C. Swihart. J. Appl. Phys. **32**, *3*, 461 (1961).
[2] K.L. Ngai. Phys. Rev. **182**, *2*, 555 (1969).
[3] А. Бароне, Дж. Патерно. Эффект Джозефсона: физика и применения. Мир, М. (1984). 639 с.
[4] К.К. Лихарев. Введение в динамику джозефсоновских переходов. Наука, М. (1985). 320 с.
[5] S. Sakai, A.V. Ustinov, H. Kohlstedt, A. Petraglia, N.F. Pedersen. Phys. Rev. **B50**, *17*, 12905 (1994).
[6] Г.М. Лапир, К.К. Лихарев, Л.А. Маслова, В.К. Семенов. ФНТ **1**, *10*, 1235 (1975).
[7] М.Ю. Куприянов, К.К. Лихарев, В.К. Семенов. ФНТ **2**, *6*, 706 (1976).
[8] Ю.М. Иванченко, Т.К. Соболева. Письма в ЖЭТФ **51**, *2*, 100 (1990).
[9] Yu.M. Ivanchenko, T.K. Soboleva. Phys. Lett. **A147**, *1*, 65 (1990).
[10] A. Gurevich. Phys. Rev. **B46**, *5*, 3187 (1992).
[11] Ю.М. Алиев, В.П. Силин, С.А. Урюпин. Сверхпроводимость: физика, химия, техника **5**, *2*, 228 (1992).
[12] Ю.М. Алиев, В.П. Силин. ЖЭТФ **104**, *1*, 2526 (1993).
[13] R.G. Mints, I.B. Snapiro. Physica **A200**, 426 (1993).
[14] R.G. Mints, I.B. Snapiro. Phys. Rev. **B49**, *9*, 6188 (1994).
[15] G.L. Alfimov, A.F. Popkov. Phys. Rev. **B52**, *6*, 4503 (1995).
[16] Ю.Е. Кузолев, А.И. Ломтев. ЖЭТФ **111**, *5*, 1803 (1997).
[17] R.G. Mints, I.B. Snapiro. Phys. Rev. **B51**, *5*, 3054 (1995).
[18] Ю.М. Алиев, К.Н. Овчинников, В.П. Силин, С.А. Урюпин. ЖЭТФ **107**, *3*, 972 (1995).
[19] В.П. Силин, С.А. Урюпин. ЖЭТФ **108**, *6(12)*, 2163 (1995).
[20] R.G. Mints. J. Low Temp. Phys. **106**, *3/4*, 183 (1997).
[21] К.Н. Овчинников, В.П. Силин, С.А. Урюпин. ФММ **83**, *5*, 14 (1997).
[22] J. Pearl. Appl. Phys. Lett. **5**, *4*, 65 (1964).
[23] Ж.Д. Генчев, В.И. Васькивський. ЖЭТФ **113**, *3*, 955 (1998).
[24] B.I. Ivlev, N.B. Kopnin. Adv. Phys. **33**, *1*, 47 (1984).
[25] А.А. Абрикосов. Основы теории металлов. Наука, М. (1987). С. 317.