## Распределение локального магнитного поля вихревой решетки вблизи поверхности анизотропного сверхпроводника в наклонных внешних полях

© С.А. Ефремова, С.Л. Царевский

Казанский государственный университет, 420008 Казань, Россия

## (Поступила в Редакцию 7 апреля 1997 г.)

В рамках лондоновской модели найдено распределение магнитного поля в элементарной ячейке вихревой решетки Абрикосова вблизи поверхности одноосного анизотропного сверхпроводника второго рода в наклонном внешнем магнитном поле для случаев, когда ось симметрии перпендикулярна и параллельна границе поверхности сверхпроводника. Получено распределение локального магнитного поля как функция расстояния от поверхности границы сверхпроводника и угла наклона внешнего поля. На примере высокотем-пературного сверхпроводника Y–Ba–Cu–O показано, что исследование функции распределения локального магнитного поля в зависимости от угла наклона внешнего магнитного поля по отношению к оси симметрии сверхпроводника и к поверхности сверхпроводника может дать важные сведения об анизотропных свойствах сверхпроводника.

1. Все известные высокотемпературные сверхпроводники (ВТСП) имеют слоистую структуру, что определяет сильную анизотропию их физических свойств. Магнитные свойства таких сверхпроводников можно описать с помощью уравнений Гинзбурга-Ландау (ГЛ) с феноменологическим массовым тензором [1-3]. В области магнитных полей Н вблизи верхнего критического поля Н<sub>c2</sub> эти уравнения удается линеаризовать и найти их решение [3]. Однако во многих случаях для реальных экспериментов с высокотемпературными сверхпроводниками является важным исследование их магнитных свойств в магнитных полях вдали от  $H_{c2}$ , где уравнения ГЛ сильно нелинейны. Тем не менее для сверхпроводников второго рода, для которых параметр ГЛ  $\chi \gg 1$ , в широкой области внешнего магнитного поля  $H_{c1} < H < H_{c2}$  ( $H_{c1}$  — нижнее критическое поле) уравнения ГЛ для локального магнитного поля таких сверхпроводников сводятся к уравнениям Лондонов. В работе [4] найдено распределение локального магнитного поля вихревой решетки в глубине массивного анизотропного сверхпроводника на основе обобщенных уравнений Лондонов для произвольного направления внешнего магнитного поля.

В последнее время значительно возрос интерес к изучению локального магнитного поля h(r) ВТСП вблизи границы сверхпроводника как внутри, так и вне его поверхности. Это связано с тем, что именно приграничная область сверхпроводника оказывается доступной для исследования свойств ВТСП многими методами: ЭПР и ЯМР (из-за скин-эффекта), методом магнитной пробы на поверхности сверхпроводника, методом декорирования поверхности сверхпроводника магнитного поля на поверхности сверхпроводника мелкодисперсными частицами, методами сканирования магнитного поля на поверхности сверхпроводника с помощью пробной частицы на основе эффекта Холла и на основе измерения силы взаимодействия с вихрями.

Важно отметить, что для интерпретации экспериментальных данных во многих случаях необходимо знать не только карту магнитного поля, но и функцию распределения локального магнитного поля в элементарной ячейке вихревой решетки  $\rho(h, z)$  на расстоянии z от границы сверхпроводника как вне, так и внутри сверхпроводника. Так,  $\rho(h, z)$  измеряется в экспериментах по мюонному спиновому вращению ( $\mu^+SR$ ) (см., например, [5]). Функция  $\rho(h, z)$  определяет неоднородную ширину линии магнитного резонанса как внутри [6], так и на поверхности сверхпроводника в методах магнитной пробы.

В работах [7,8] найдено магнитное поле вихревой решетки анизотропного сверхпроводника в окрестности границы сверхпроводника в случае, когда внешнее магнитное поле направлено перпендикулярно его поверхности. Ясно, что определение магнитного поля в приграничной области сверхпроводника в наклонных к поверхности сверхпроводника магнитных полях может дать дополнительные сведения о параметрах сверхпроводника. В [9] найдено магнитное поле одиночного прямолинейного вихря, направленного под углом к поверхности сверхпроводника. В области магнитных полей  $H_{c1} < H < H_{c2}$  вихри расположены достаточно плотно, и даже при сравнительно высоких температурах в распределении вихрей наблюдается ближний порядок [10] (за исключением, быть может, специально приготовленных образцов с большим количеством центров пиннинга), так что становится важным найти распределение магнитного поля сверхпроводника в наклонных магнитных полях в элементарной ячейке вихревой решетки.

В настоящей работе получены аналитические формулы для Фурье-компонент локального магнитного поля  $\mathbf{h}(\mathbf{r})$  вихревой решетки для случаев, когда слои кристалла анизотропного сверхпроводника направлены параллельно (по анлогии с [9]) и перпендикулярно поверхности образца, в зависимости от расстояния до поверхности образца как вне, так и внутри сверхпроводника и от угла наклона внешнего магнитного поля. Приведены результаты компьютерного расчета функции распределения локального магнитного поля в элементарной ячейке

вихревой решетки ВТСП У-Ва-Си-О в зависимости от глубины z от поверхности сверхпроводника и угла наклона внешнего магнитного поля.

Как и в работе [9], будем считать, что вихри прямолинейны. Вообще говоря, вопрос об искривлении вихрей при подходе к границе требует специального рассмотрения. Однако ясно, что изменение параметра порядка и связанного с ним направления вихря из-за влияния границы будет происходить на расстояниях порядка длины когерентности  $\xi$  (см., например, [11]) и при  $\chi \gg 1$  этим искривлением можно пренебречь.

2. Рассмотрим сверхпроводник, помещенный в магнитное поле и занимающий полупространство z < 0. Пусть граница поверхности сверхпроводника перпендикулярна оси z. В материалах с  $\lambda \gg \xi$  магнитное поле описывается уравнениями Лондонов с учетом сингулярности в вихрях [12,13]

$$h_i - \lambda^2 m_{kl} \varepsilon_{ils} \varepsilon_{ktj} h_{j,st} = \Phi_0 v_i \sum_{\nu} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\nu}).$$
(1)

Здесь  $h_{i,xy} = \partial^2 h_i / \partial x \partial y$ , где  $i=x, y, z, \Phi_0$  — квант магнитного потока (при этом магнитная индукция  $B = \Phi_0/S$ , S — площадь элементарной ячейки вихревой решетки),  $\varepsilon_{ils}$  — единичный антисимметричный тензор, v — направление оси вихря, **r** — радиус-вектор в плоскости *xy*,  $\mathbf{r}_{\nu}$  — радиус-вектор сердцевины  $\nu$ -й нити,  $m_{kl}$  — тензор массы. Далее везде длина измеряется в единицах усредненной глубины проникновения магнитного поля —  $\lambda$ ; магнитное поле — в единицах  $\Phi_0/\lambda^2$ .

Общее решение уравнения ищем в виде

$$\mathbf{h} = \mathbf{h}^0 + \mathbf{h}^v, \tag{2}$$

где  $\mathbf{h}^0$  — общее решение однородного уравнения,  $\mathbf{h}^{\nu}$  частное решение неоднородного уравнения.

В области z > 0 распределение магнитного поля определяется уравнениями Максвелла в вакууме

$$\operatorname{rot} \mathbf{h}_{\nu}(\mathbf{r}) = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{h}_{\nu}(\mathbf{r}) = 0, \quad (3)$$

где  $\mathbf{h}_{v}(\mathbf{r})$  — магнитное поле в вакууме.

Уравнения (1) и (3) на границе раздела двух сред дополняются уравнениями непрерывности

$$\mathbf{h}_{v}(x, y, 0) = \mathbf{h}_{s}(x, y, 0), \qquad (4)$$

 $\mathbf{h}_{s}(\mathbf{r})$  — магнитное поле в сверхпроводнике.

Поле h(r) имеет периодичность вихревой решетки в плоскости ху, так что его можно разложить в ряд Фурье

$$\mathbf{h}(\mathbf{r}, z) = \sum_{\mathbf{G}} \mathbf{h}(\mathbf{G}, z) \exp(i\mathbf{G}\mathbf{r}), \qquad (5)$$

$$\mathbf{h}(\mathbf{G}, z) = \frac{B}{\Phi_0} \int \mathbf{h}(\mathbf{r}, z) \exp(iGr) d^2r, \tag{6}$$

где h(G, z) — Фурье-образ магнитного поля, G — вектор обратной решетки. В формуле (6) интеграл берется по всей площади элементарной ячейки.

3. Пусть внешнее однородное магнитное поле направлено под некоторым углом  $\theta$  к нормали поверхности сверхпроводника (оси z). Рассмотрим два важных случая, которые чаще всего реализуются в экспериментах при исследовании поверхности сверхпроводника: 1) ось симметрии сверхпроводника с перпендикулярна границе образца; 2) ось симметрии с параллельна границе образша.

В работе [9] задача 1) решена для одиночного вихря. В силу линейности уравнений (1) и (3) и вследствие того, что правая часть уравнений (1) представляет собой суперпозицию вихрей, результаты, полученные в [9], легко распространить на случай решетки вихрей. Для этого достаточно  $\mathbf{h}(\mathbf{r})$  представить не интегралом Фурье по  $d\mathbf{k}$  [9], а суммой по векторам обратной решетки G, причем Фурье-компоненты h(G) можно получить из формул (24) и (25) работы [9] заменой  $\mathbf{k} \to \mathbf{G}, \, \Phi_0 \to B$ .

Таким образом, в случае 1), когда ось симметрии кристалла перпендикулярна поверхности сверхпроводника, решения уравнений Лондонов (1) и (3), удовлетворяющие граничным условиям (4) для z = 0, в сверхпроводнике ( $z \leq 0$ ) имеют следующий вид:

----

$$h_{sx}^{\perp}(\mathbf{G}, z, \theta) = \frac{Bd_1 \operatorname{tg} \theta}{\Delta} - \frac{BG_x \alpha_1}{G^2 d_2} (iG + G_x \operatorname{tg} \theta) \exp(\alpha_1 z) + \frac{BG_y^2 d_3 \operatorname{tg} \theta}{\Delta} \exp(\alpha_3 z), h_{sy}^{\perp}(\mathbf{G}, z, \theta) = \frac{B(m_c - m_a)G_x G_y \operatorname{tg} \theta}{\Delta} - \frac{BG_y \alpha_1}{G^2 d_2} (iG + G_x \operatorname{tg} \theta) \times \exp(\alpha_1 z) - \frac{BG_x G_y d_3 \operatorname{tg} \theta}{\Delta} \exp(\alpha_3 z),$$

$$h_{sz}^{\perp} = (\mathbf{G}, z, \theta) = \frac{B}{\Delta_1} - \frac{B}{d_2} (G - iG_x \operatorname{tg} \theta) \exp(\alpha_1 z), \quad (7)$$

а в вакууме (z > 0) — следующий:

 $\Delta$ 

$$h_{vx}^{\perp}(\mathbf{G}, z, \theta) = \frac{BG_x}{Gd_2}(G_x \operatorname{tg} \theta - i\alpha_1) \exp(-Gz),$$
  

$$h_{vy}^{\perp}(\mathbf{G}, z, \theta) = \frac{BG_y}{Gd_2}(G_x \operatorname{tg} \theta - i\alpha_1) \exp(-Gz),$$
  

$$h_{vz}^{\perp}(\mathbf{G}, z, \theta) = \frac{B}{d_2}(\alpha_1 + G_x \operatorname{tg} \theta) \exp(-Gz),$$
  

$$\alpha_1^2 = (1 + m_a G^2)/m_a, \quad \alpha_3^2 = (1 + m_c G^2)/m_a,$$
  

$$a_1 = 1 + m_a G^2 + m_a G_x^2 \operatorname{tg}^2 \theta, \quad \Delta_2 = 1 + m_c G^2 + m_a G_x^2 \operatorname{tg}^2 \theta,$$
  

$$\Delta = \Delta_1 \Delta_2, \quad d_1 = 1 + m_a (G_y^2 + G_x^2 \operatorname{tg} \theta) + m_c G_x^2,$$
  

$$d_2 = (G + \alpha_1)/\Delta_1, \quad d_3 = m_c - m_a - \Delta_2/G^2.$$
 (8)

Здесь  $h_{xi}^{\perp}(\mathbf{G}, z), h_{yi}^{\perp}(\mathbf{G}, z)$  (i = x, y, z) — Фурье-компоненты поля в сверхпроводнике и в вакууме для случая, когда ось симметрии направлена перпендикулярно границе поверхности сверхпроводника.

Рассмотрим случай 2): ось симметрии с параллельна границе образца. Введем систему координат: ось х направлена по оси с, ось z, как и прежде, перпендикулярна поверхности образца. Тогда ненулевые компоненты тензора массы равны:  $m_{xx} = m_c, m_{yy} = m_{zz} = m_a$ . В этой системе координат анизотропные свойства сверхпроводника проявляются в плоскости ху, и для определения направления магнитного поля (а значит, и направления вихрей) необходимо знать два угла:  $\theta$  — угол между осями **z** и **v** и  $\varphi$  — угол между проекцией **v** на xyи х. В общем случае произвольных углов для внешнего магнитного поля формулы для Фурье-компонент достаточно громоздки. Приведем их для случая, когда вектор магнитного поля лежит в плоскости ху под углом  $\theta$  к оси **z** ( $\varphi = 0$ ). Повторяя выкладки, аналогичные тем, что и в [9], получим для Фурье-компонент магнитного поля, удовлетворяющих граничным условиям (4) при z = 0, в сверхпроводнике ( $z \leq 0$ )

$$\begin{split} h_{xx}^{\parallel}(\mathbf{G},z,\theta) &= \frac{B \operatorname{tg} \theta}{\Delta_1} - \frac{B}{t_3 \Delta} (t_2 \operatorname{tg} \theta - iG_x t_1 \alpha_3) \exp(\alpha_1 z), \\ h_{xy}^{\parallel}(\mathbf{G},z,\theta) &= -\frac{BG_x G_y (m_c - m_a) \operatorname{tg} \theta}{\Delta} - \frac{BG_x G_y m_a}{t_0 t_3 \Delta} \\ &\times (t_2 \operatorname{tg} \theta - iG_x \alpha_3 t_1) \exp(\alpha_1 z) + \frac{BG_y}{t_3 \Delta} \Big[ G_x \operatorname{tg} \theta \\ &\times \left( t_1 + \frac{\alpha_1 (\alpha_3 - \alpha_1) \Delta_2 + m_a t_2}{t_0} \right. \\ &+ t_3 (m_c - m_a) \Big) - i\alpha_3 t_1 \left( 1 + \frac{m_a G_x}{t_0} \right) \Big] \exp(\alpha_3 z), \\ h_{xz}^{\parallel}(\mathbf{G}, z, \theta) &= -\frac{Bt_1}{\Delta} + \frac{Bm_a G_x \alpha_1}{t_0 t_3 \Delta} (t_1 \alpha_3 G_x + i t_2 \operatorname{tg} \theta) \\ &\times \exp(\alpha_1 z) - \frac{BG_y}{t_3 \Delta} \left( t_1 \left( 1 + \frac{m_a G_x^2}{t_0} \right) + i \frac{G_x \operatorname{tg} \theta}{\alpha_3} \right) \\ &\times \left[ t_1 + \frac{m_a \alpha_1 (\alpha_3 - \alpha_1) \Delta_2 + m_a t_2}{t_0} \right] \end{split}$$

$$+ t_3 (m_c - m_a) \Big] \Big) \exp(\alpha_3 z),$$
 (9)

 $t_0$ 

в вакууме (z > 0)

$$h_{\nu x}^{\parallel}(\mathbf{G}, z, \theta) = B\left(\frac{t_1 G_x}{t_3 \Delta} (G_x \operatorname{tg} \theta - i\alpha_3) + \frac{m_a G_x^2 \alpha_1 (\alpha_3 - \alpha_1) \operatorname{tg} \theta}{t_0 t_3 \Delta_1}\right) \exp(-Gz),$$

$$\begin{split} h_{\nu y}^{\parallel}(\mathbf{G},z,\theta) &= B \bigg( \frac{t_1 G_y}{t_3 \Delta} (G_x \operatorname{tg} \theta - i\alpha_3) \\ &+ \frac{m_a G_x G_y \alpha_1 (\alpha_3 - \alpha_1) \operatorname{tg} \theta}{t_0 t_3 \Delta_1} \bigg) \exp(-Gz), \\ h_{\nu z}^{\parallel}(\mathbf{G},z,\theta) &= B \bigg( \frac{t_1 G}{t_3 \Delta} (\alpha_3 + iG_x \operatorname{tg} \theta) \\ &+ i \frac{m_a G G_y \alpha_1 (\alpha_3 - \alpha_1) \operatorname{tg} \theta}{t_0 t_3 \Delta_1} \bigg) \exp(-Gz), \end{split}$$

Здесь  $h_{si}^{\parallel}(\mathbf{G}, z), h_{vi}^{\parallel}(\mathbf{G}, z)$  (i = x, y, z) — Фурье-компоненты поля в сверхпроводнике и в вакууме для случая, когда ось симметрии направлена параллельно границе поверхности сверхпроводника.

4. Поскольку выполнить обратное преобразование Фурье полученных решений аналитически затруднительно, сделаем это численно с помощью стандартной процедуры быстрого преобразования Фурье (БПФ) для двумерных периодических функций.

Структура вихревой решетки при  $B \gg \Phi_0/\lambda^2$  и произвольном направлении В (В совпадает с направлением вихревой оси) определяется базисными векторами **b**<sub>1,2</sub> элементарной ячейки [12,13]

$$\mathbf{b}_{1} = \left(\frac{2\Phi_{0}}{B}\right)^{1/2} \left(\frac{m_{zz}}{3m_{c}}\right)^{1/4} \mathbf{e}_{x},$$
$$\mathbf{b}_{2} = \frac{b_{1}}{2} \left(\mathbf{e}_{x} + \left(\frac{3m_{c}}{m_{zz}}\right)^{1/2} \mathbf{e}_{y}\right).$$
(11)

Такая решетка состоит из равнобедренных треугольников. Отношение одной из сторон треугольника к его основанию  $b_2/b_1$  и угол  $\varphi$  между векторами  $\mathbf{b}_1$  и  $\mathbf{b}_2$ равны

$$\frac{2b_2}{b_1} = \sqrt{1 + \frac{3m_c}{m_{zz}}}, \quad \text{tg}\,\varphi = \sqrt{\frac{3m_c}{m_{zz}}}.$$
 (12)

Компоненты вектора обратной решетки, соответствующие элементарной ячейке, имеют вид

$$G_{x}^{nl} = \pi \sqrt{\frac{2B}{\Phi_{0}}} \sqrt[4]{\frac{3m_{c}}{m_{zz}}} n,$$

$$G_{y}^{nl} = \pi \sqrt{\frac{2B}{\Phi_{0}}} \sqrt[4]{\frac{m_{zz}}{m_{c}}} (2l - n),$$
(13)

где  $n, l = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ .

Выберем следующее значение отношения масс:  $\Gamma = m_3/m_1 = 25$ , которое отражает анизотропию высокотемпературного сверхпроводника YBaCuO с  $T_c = 90 \,\mathrm{K}$ . Магнитное поле имеет значение B = 2, что значительно превышает величину  $H_{c1}$  (см. [4]). Неоднородное распределение магнитного поля  $h = |\mathbf{h}|$  в элементарной ячейке вихревой решетки вносит вклад в уширение линии магнитного резонанса в сверхпроводнике. В случае когда это единственный источник уширения, форма линии магнитного резонанса, в частности ЯМР, точно воспроизводит функцию распределения локальных магнитных полей в вихревой решетке. Для того чтобы получить более детальную картину распределения поля



**Рис. 1.** Функция распределения  $\rho(h, z, \theta)$  локального магнитного поля *h* в элементарной ячейке вихревой решетки анизотропного сверхпроводника в случае с || **z**. *a* — в зависимости от расстояния до поверхности сверхпроводника z ( $\theta = \pi/4$ ), значения поля отложены от  $h_{\min} = 1.9174$  до B = 2; *b* — в зависимости от угла  $\theta$  ( $\theta = n\pi/20$ ) (z = -0.1), значения поля отложены от  $h_{\min} = 1.9370$  до B = 2.

как функции угла между направлением вихря v и осью z, перпендикулярной плоскости поверхности сверхпроводника, вычислим функцию распределения локального магнитного поля  $\rho(h, z, \theta)$  в элементарной ячейке вихревой решетки для тонкого по сравнению с  $\lambda$  слоя, отстоящего на расстояние z от границы сверхпроводника. Форма линии  $\rho(h, z, \theta)$  определяется подсчетом относительного числа точек в плоскости xy, для которых величина поля лежит в пределах от h до h + dh ( $dh = (B - h_{\min})/50$ , где B = 2 — внешнее магнитное поле; значение минимального поля в сверхпроводнике  $h_{\min}$  определялось на глубине z = -3.0), при этом крыльям линии соответствуют максимум магнитного поля, находящийся в центре вихря, и минимум в долине рельефа распределения поля, а пик линии соответствует седловым точкам.

На рис. 1 и 2 представлены результаты расчета функции  $\rho(h, z, \theta)$  для разных углов наклона внешнего магнитного поля  $\theta$  на разных глубинах z от поверхности сверхпроводника как внутри, так и вне сверхпроводника. Обращает на себя внимание резкое отличие вида функции распределения локального магнитного поля в приповерхностной области сверхпроводника для различных расположений границы сверхпроводника относительно оси. На рис. 1, а и 2, а представлены графики линии  $\rho(h, z, \theta)$  в зависимости от расстояния до поверхности границы сверхпроводника. Здесь пик линии смещается к большим значениям поля по мере продвижения к поверхности границы. Появление двух пиков резонансной линии в случае с || z подобно тому, как это имеет место в толще сверхпроводника [4], означает появление указанных седловых точек разной высоты в рельефе распределения магнитного поля вихревой решетки. Как видно из рис. 1, b и 2, b, форма линии существенно меняется в зависимости от ориентации внешнего магнитного поля. Так, в случае **с**  $\parallel$  **z** (рис. 1, *b*) пик линии  $\rho(h, z, \theta)$  при определенном значении z (в данном случае z = -0.1) смещается к значению внешнего магнитного поля по мере увеличения угла наклона  $\theta$  от 0 до  $\pi/4$ , а затем обратно при увеличении  $\theta$  от  $\pi/4$  до  $\pi/2$ . В случае  $\mathbf{z} \perp \mathbf{c}$  (рис. 2, *b*) поле достаточно быстро приближается к однородному на поверхности сверхпроводника, а следовательно, и вне сверхпроводника.

Из приведенных расчетов следует, что любое определение магнитных параметров сверхпроводника, связанное с измерениями локального магнитного поля вблизи его поверхности, должно опираться на соответствующий анализ приповерхностного распределения полей вихревой решетки.



**Рис. 2.** То же, что и на рис. 1, в случае  $\mathbf{c} \perp \mathbf{z}$ . Значения поля отложены от  $h_{\min} = 1.6401$  (*a*) и 1.7503 (*b*) до B = 2.

## Список литературы

- [1] В.Л. Гинзбург, Л.Д. Ландау. ЖЭТФ 20, 1064 (1950).
- [2] В.Л. Гинзбург. ЖЭТФ 23, 236 (1952).
- [3] D.R. Tilley. Proc. Phys. Soc. Lond. 85, 1177 (1965).
- [4] S.L. Thiemann, Z. Radovic, V.G. Kogan. Phys. Rev. B39, 11406 (1989).
- [5] Ю.М. Белоусов, В.Н. Горбунов, В.П. Смилга, В.И. Фесенко. УФН 160, 11, 55 (1990).
- [6] Б.И. Кочелаев, Ю.Н. Прошин, С.Л. Царевский. ФТТ 38, 11, 3220 (1996).
- [7] Б.И. Кочелаев, Е.П. Шарин. СФХТ 5, 10, 1931 (1992).
- [8] Б.И. Кочелаев, Е.П. Шарин. СФХТ 5, 11, 1982 (1992).
- [9] V.G. Kogan, A.Yu. Simonov, M. Ledvij. Phys. Rev. B48, 392 (1993).
- [10] D.J. Bishop, P.L. Gammel, D.A. Huse, C.A. Murray. Science 255, 165 (1992).
- [11] O. Fritz, M. Wulfert, H.J. Hug, H. Thomas, H. Guntherodt. Phys. Rev. B47, 384 (1993).
- [12] V.G. Kogan. Phys. Lett. A85, 298 (1981).
- [13] L.J. Campbell, M.M. Doria, V.G. Kogan. Phys. Rev. B38, 2439 (1988).