

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ им. А.Ф. ИОФФЕ

На правах рукописи

**ГУСАКОВ МИХАИЛ ЕВГЕНЬЕВИЧ**

**ОСТЫВАНИЕ И ПУЛЬСАЦИИ СВЕРХТЕКУЧИХ  
НЕЙТРОННЫХ ЗВЕЗД**

Специальность 01.03.02 – астрофизика и радиоастрономия

**ДИССЕРТАЦИЯ**

на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель  
доктор физико-математических наук  
ЯКОВЛЕВ Д.Г.

Санкт-Петербург  
2006

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	5
1 Остывание сверхтекучих нейтронных звезд	10
1.1 Нейтринное излучение сверхтекучих ядер нейтронных звезд .	10
1.1.1 Основные нейтринные процессы в ядрах нейтронных звезд . . . . .	10
1.1.2 Модифицированный урка-процесс . . . . .	14
1.1.3 Приближенные факторы подавления нейтринного излучения при нуклон-нуклонном рассеянии в сверхтекучем веществе . . . . .	25
1.1.4 Обсуждение результатов . . . . .	28
1.2 Симметрия эффектов сверхтекучести нейтронов и протонов в остывающих нейтронных звездах . . . . .	33
1.2.1 Наблюдения остывающих нейтронных звезд . . . . .	34
1.2.2 Модели сверхтекучести нуклонов и нейтринное излучение при куперовском спаривании протонов . . . . .	37
1.2.3 Остывание звезд с сильной сверхтекучестью протонов .	40
1.2.4 Остывание нейтронных звезд при совместной сверхтекучести нуклонов . . . . .	43
1.2.5 Два типа триплетной сверхтекучести нейтронов . . . . .	50
1.3 Основные результаты первой главы . . . . .	53
2 Куперовское спаривание нуклонов как механизм ускоренного остывания нейтронных звезд	56
2.1 Сценарий остывания . . . . .	56

2.2	Куперовское спаривание нейтронов как причина ускоренного остывания . . . . .	60
2.3	Обсуждение сценария остывания . . . . .	66
2.4	Дальнейшая разработка сценария остывания . . . . .	70
2.5	Основные результаты второй главы . . . . .	76
3	Прямой урка-процесс в мантии нейтронной звезды . . . . .	80
3.1	Введение к главе 3 . . . . .	80
3.2	Потенциальная энергия нуклонов в мантии звезды и нуклонные волновые функции . . . . .	81
3.3	Нейтринное энерговыделение прямого урка-процесса в мантии звезды . . . . .	83
3.4	Влияние прямого урка-процесса в мантии звезды на остывание маломассивных нейтронных звезд . . . . .	88
3.5	Основные результаты третьей главы . . . . .	94
4	Тепловая эволюция колеблющейся нейтронной звезды . . . . .	96
4.1	Введение к главе 4 . . . . .	96
4.2	Собственные функции и частоты радиальных колебаний звезд без учета диссипации . . . . .	97
4.3	Неравновесный модифицированный урка-процесс . . . . .	101
4.4	Уравнения тепловой эволюции и затухания колебаний звезд в отсутствие бета-равновесия . . . . .	105
4.5	Аналитические решения и предельные случаи . . . . .	110
4.5.1	Модифицированный урка-процесс: универсальный нелинейный режим звездной эволюции . . . . .	111
4.5.2	Затухание колебаний за счет сдвиговой вязкости . . . . .	113
4.5.3	Подтепловой режим колебаний звезды . . . . .	113
4.5.4	Надтепловой режим колебаний звезды . . . . .	115
4.6	Результаты моделирования . . . . .	116
4.7	Основные результаты четвертой главы . . . . .	121
5	Матрица сверхтекучих плотностей нейтрон-протонной смеси при ко-	

нечных температурах	123
5.1 Введение к главе 5 . . . . .	123
5.2 Нейтрон-протонная смесь в ядре нейтронной звезды . . . . .	126
5.3 Нейтрон-протонная смесь с учетом сверхтекучих токов . . . . .	129
5.3.1 Общие формулы . . . . .	129
5.3.2 Расчет матрицы $\gamma_{\alpha\alpha'}$ . . . . .	132
5.4 Матрица сверхтекучих плотностей . . . . .	134
5.4.1 Выражение для сверхтекучего тока массы . . . . .	134
5.4.2 Параметры Ландау нейтрон-протонной смеси . . . . .	137
5.5 Основные результаты пятой главы . . . . .	141
6 Температурная зависимость спектра пульсаций сверхтекучих нейтронных звезд	143
6.1 Введение к главе 6 . . . . .	143
6.2 Релятивистские уравнения бездиссипативной гидродинамики сверхтекучей смеси . . . . .	145
6.3 Равновесные конфигурации сверхтекучих нейтронных звезд . . . . .	149
6.4 Радиальные пульсации сверхтекучих нейтронных звезд . . . . .	152
6.4.1 Основные уравнения . . . . .	153
6.4.2 Определение функций $\delta P$ и $\delta\mu_n$ . . . . .	156
6.4.3 Граничные условия . . . . .	158
6.5 Звук в сверхтекучих смесях . . . . .	160
6.6 Результаты для радиальных пульсаций . . . . .	165
6.7 Основные результаты шестой главы . . . . .	170
Заключение	173
Приложения	190

# ВВЕДЕНИЕ

## Актуальность темы диссертации

Нейтронные звезды являются уникальными астрофизическими объектами. Вследствие чрезвычайной компактности (радиус нейтронной звезды  $R \sim 10$  км, а масса порядка солнечной массы,  $M \sim M_{\odot}$ ), центральные плотности в таких звездах могут достигать нескольких ядерных плотностей  $\rho_0$  ( $\rho_0 \approx 2.8 \times 10^{14}$  г см<sup>-3</sup>). Поэтому нейтронные звезды можно рассматривать как природные лаборатории для исследования сверхплотного вещества. При этом существенно, что барионы в ядрах нейтронных звезд могут находиться в сверхтекучем состоянии.

Данная работа посвящена двум методам исследования внутренней структуры сверхтекучих нейтронных звезд. Первый метод связан с остыванием звезд. Выбирается определенная модель изолированной нейтронной звезды и теоретически исследуется ее тепловая эволюция. При выборе модели уравнение состояния и критические температуры перехода вещества в состояние сверхтекучести рассматриваются как свободные параметры, которые следует определить из сравнения теории с наблюдениями. При этом необходимо уметь правильно учитывать влияние сверхтекучести на нейтринные процессы, приводящие к охлаждению звезд. Первые три главы диссертационной работы посвящены теории остывания нейтронных звезд.

Второй метод связан с сейсмологией нейтронных звезд. Он начинает активно развиваться только сейчас. Предположим, что в результате какого-либо внешнего воздействия или внутренней неустойчивости в звезде возбуждены собственные колебания. Эти колебания могут влиять на электромагнитное излучение звезды, а также приводить к излучению гравитационных волн. Хотя гравитационные детекторы для обнаружения такого излучения еще только проектируются [8], пульсации нейтронных звезд уже обнаруже-

ны [144]. Анализ этих данных в принципе может позволить делать выводы о внутреннем строении нейтронных звезд. Последние три главы диссертационной работы посвящены этим вопросам.

### Цели работы

1. Исследование влияния сверхтекучести нуклонов на нейтринные потери энергии в реакциях модифицированного урка-процесса и при столкновениях нуклонов в ядрах нейтронных звезд, а также анализ новых сценариев остывания нейтронных звезд, удовлетворяющих наблюдательным данным.
2. Исследование нового эффективного механизма нейтринного охлаждения – прямого урка-процесса в мантии нейтронной звезды.
3. Расчет времен затухания радиальных надтепловых пульсаций нейтронных звезд с самосогласованным учетом их тепловой эволюции.
4. Исследование влияния конечных температур ядер сверхтекучих нейтронных звезд на пульсации этих звезд.

### Новизна работы

1. Рассчитаны и аппроксимированы аналитическими формулами факторы подавления модифицированного урка-процесса и процессов излучения нейтрино при нуклон-нуклонных столкновениях совместной сверхтекучестью нейтронов и протонов различных типов.
2. На основе полученных факторов подавления проведено моделирование остывания нейтронных звезд с различными параметрами сверхтекучести в их ядрах. Показано, что существует качественная симметрия кривых остывания нейтронных звезд относительно инверсии моделей сверхтекучести нейтронов и протонов.
3. Предложен новый сценарий остывания нейтронных звезд, в котором все наблюдательные данные объясняются без привлечения прямого

урка-процесса в качестве ускорителя остывания.

4. Исследован новый эффективный механизм нейтринного излучения – прямой урка-процесс в мантии нейтронной звезды. Проведено моделирование остывания нейтронных звезд с учетом этого процесса.
5. Исследована тепловая эволюция несверхтекучих нейтронных звезд, совершающих радиальные колебания.
6. Рассчитана температурная зависимость матрицы сверхтекучих плотностей нейтрон-протонной смеси в ядрах нейтронных звезд.
7. Впервые проанализировано влияние конечных температур в ядрах сверхтекучих нейтронных звезд на спектр их пульсаций. Показано, что частоты колебаний могут сильно зависеть от температуры.

### Достоверность научных результатов

Результаты диссертации получены аналитически или путем численного моделирования. Их достоверность подтверждается использованием адекватных математических и численных методов в рамках физически разумных приближений, применимость которых ограничена четко сформулированными критериями. Там, где это было возможно, результаты численных расчетов сверялись с теоретическими формулами, полученными в разных предельных случаях.

### Практическая значимость работы

Результаты диссертации необходимы для исследования фундаментальных свойств вещества сверхъядерной плотности в ядрах нейтронных звезд, для численного моделирования остывания и колебаний сверхтекучих нейтронных звезд и адекватной интерпретации наблюдательных данных по их тепловому излучению.

1. Расчет и аналитическая аппроксимация факторов подавления, описывающих совместное влияние сверхтекучести нейтронов и протонов на модифицированный урка-процесс и на процессы нейтринного излучения при нуклон-нуклонном рассеянии.
2. Проведение расчетов остывания нейтронных звезд с новыми факторами подавления и определение новых сценариев остывания, объясняющих наблюдательные данные.
3. Предложение нового сценария остывания нейтронных звезд, не требующего привлечения прямого урка-процесса для объяснения наблюдений теплового излучения изолированных нейтронных звезд среднего возраста.
4. Исследование нового механизма нейтринного излучения – прямого урка-процесса в мантии нейтронной звезды и учет его влияния на остывание нейтронных звезд.
5. Исследование затухания надтепловых радиальных пульсаций несверхтекучих нейтронных звезд в процессе их тепловой эволюции.
6. Расчет температурной зависимости матрицы сверхтекучих плотностей нейтрон-протонной смеси в ядрах нейтронных звезд.
7. Рассмотрение в рамках общей теории относительности радиальных пульсаций сверхтекучих нейтронных звезд; исследование эволюции спектра пульсаций со временем.

#### Апробация работы и публикации

Результаты, вошедшие в диссертацию, были получены в период с 2002 по 2005 гг. и изложены в 20 печатных работах [36–48, 66–68, 184–187] (включая 10 статей в реферируемых журналах [36, 37, 39–41, 43–45, 68, 185]). Результаты диссертационной работы были представлены на международных кон-



ференциях: International Nuclear Physics Conference (INPC 2004; Goeteborg, Sweden, 2004), International Workshop on Neutron Stars: Their Structure and Cooling (Trento, Italy, 2004), First Polish-French Workshop on the Timely Problems of Modern Astrophysics (Warsaw, Poland, 2004), International Conference on Cosmology and High Energy Astrophysics (Zeldovich-90; Moscow, Russia, 2004), International Conference on Theoretical Physics (Moscow, Russia, 2005), International Workshop on New Physics of Compact Stars (Trento, Italy, 2005), International Workshop XXXIV on Gross Properties of Nuclei and Nuclear Excitations (Hirschegg, Kleinwalsertal, Austria, 2006), Carpathian Summer School of Physics: "Exotic Nuclei and Nuclear/Particle Astrophysics" (Mamaia-Constanta, Romania, 2005); на всероссийских конференциях: Астрофизика высоких энергий (HEA 2003 и HEA 2005; Москва, 2003 и 2005), Cosmion (Ст.-Петербург, 2004), 7<sup>th</sup> Russian Conference on Physics of Neutron Stars (St.-Petersburg, 2005), XXXIX PNPI Winter School on Nuclear and Particle Physics and XI St.-Petersburg School on Theoretical Physics, (St.-Petersburg, Repino, 2005); на семинарах сектора теоретической астрофизики ФТИ им. А.Ф. Иоффе РАН (Санкт-Петербург, Россия), на астрофизическом семинаре теоретического отдела института Физических проблем им. П.Н. Лебедева РАН (Москва, Россия, 2006), на семинаре в Парижской обсерватории (Meudon, France, 2005), на семинаре Группы Общей Теории Относительности (Southampton University, Southampton, UK, 2005), а также на семинарах университета штата Мичиган (Лензинг, США, 2004), университетов Риккю и Васеда (Токио, Япония, 2005), Токийского университета (Япония, 2005) и Киотского университета (Япония, 2005).

# ГЛАВА 1

## ОСТЫВАНИЕ СВЕРХТЕКУЧИХ НЕЙТРОННЫХ ЗВЕЗД

В этой главе рассмотрен вопрос о том, как сверхтекучесть влияет на основные процессы нейтринного излучения в ядрах нейтронных звезд. На основе полученных результатов проведено моделирование остывания сверхтекучих нейтронных звезд.

### 1.1 Нейтринное излучение сверхтекучих ядер нейтронных звезд

#### 1.1.1 Основные нейтринные процессы в ядрах нейтронных звезд

Как известно (см., например, Яковлев и др. [176, 179]), остывание нейтронных звезд сильно зависит от свойств вещества их внутренних слоев, прежде всего, от уравнения состояния вещества (см., например, Латтимер и Пракаш [92]), а также от критических температур перехода нуклонов в сверхтекучее состояние (см., например, Ломбардо и Шульце [102]). Несмотря на большой прогресс в понимании физики нейтронных звезд, эти свойства все еще известны с большой неопределенностью. Сопоставление теоретических моделей остывания с наблюдениями теплового излучения изолированных нейтронных звезд дает потенциально мощный метод исследования их внутренней структуры. Для успешного моделирования остывания нужно уметь рассчитывать энергию, теряемую звездой в единицу времени. Потери энергии идут за счет фотонного теплового излучения с поверхности нейтронной звезды и за счет излучения нейтрино из всего объема звезды. Напомним, что уже через  $\sim 30$  секунд после своего рождения, нейтронная звезда становится полностью прозрачной для нейтрино.

По существующим представлениям, на определенном этапе тепловой эво-

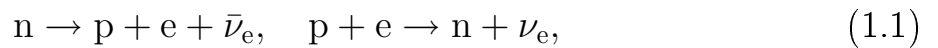
люции нейтроны и протоны в ядрах нейтронных звезд становятся сверхтекучими (сверхпроводящими) (см., например, Ломбардо и Шульце [102]). Сверхтекучесть влияет на нейтринное энерговыделение и, следовательно, на остывание нейтронных звезд. Модельные расчеты сверхтекучих щелей в спектре нуклонов показывают, что протонное спаривание происходит в синглетном состоянии (в состоянии  $^1S_0$ ) протонной пары. Нейтронное спаривание может происходить как в синглетном, так и в триплетном ( $^3P_2$ ) состоянии, причем синглетное спаривание обычно возникает в веществе не слишком высокой плотности ( $\rho \lesssim \rho_0$ , где  $\rho_0 = 2.8 \cdot 10^{14}$  г см $^{-3}$  – ядерная плотность), а триплетное – в более плотном веществе. Триплетное спаривание, в свою очередь, может быть нескольких типов, отличающихся значением проекции полного момента нуклонной пары на ось квантования ( $|m_J| = 0, 1, 2$ ). Случай синглетного спаривания будем называть случаем А, случай триплетного спаривания с  $m_J = 0$  – случаем В, а с  $|m_J| = 2$  – случаем С. Случай С выделяется среди остальных тем, что сверхтекучая щель в дисперсионном соотношении нейтронов исчезает в некоторых точках ферми-поверхности (на ее полюсах). Это приводит к принципиально иной (степенной, а не экспоненциальной) зависимости нейтринных потерь энергии нейтронных звезд от амплитуды щели (см., например, Яковлев и др. [176]). В природе реализуется тот тип сверхтекучести, который соответствует минимуму свободной энергии. Обычно при расчетах остывания рассматривается спаривание типа А протонов в ядре нейтронной звезды, спаривание типа А нейтронов в коре и во внешней части ядра, и типа В во внутренней части ядра. Спаривание нейтронов типа С в ядре нейтронной звезды кажется менее реалистичным, однако не исключается современными теориями. Например, Музикар и др. [112] показали, что оно реализуется в веществе с сильным магнитным полем ( $B \gtrsim 10^{16}$  Гс). Амундсен и Остгаард [3] обнаружили, что энергетически выгодной может быть суперпозиция состояний с разными  $m_J$  (см. также работы Бальдо и др. [16] и Ходеля и др. [157, 158]).

Следует заметить, что мы не рассматриваем здесь случай спаривания нейтронов в состоянии  $^3P_2$  с  $|m_J| = 1$ . В этом случае, как и в случаях А и В, сверхтекучая щель не обращается в ноль на ферми-поверхности (см.,

например, Амундсен и Остгаард [3]). Таким образом мы ожидаем, что влияние такого спаривания на основные процессы нейтринного энерговыделения будет схожим с влиянием спаривания В или А. С другой стороны, рассмотрение спаривания с  $|m_J| = 1$  технически значительно более сложно, так как сверхтекучая щель в этом случае зависит не только от полярного угла  $\vartheta$  между осью квантования и импульсом частицы (см. ниже), но и от азимутального угла  $\varphi$ .

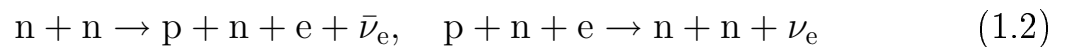
Остановимся подробнее на пяти основных механизмах генерации нейтрино в ядрах нейтронных звезд.

(1) Прямой урка-процесс – наиболее мощный нейтринный процесс, состоящий из следующих двух реакций (прямой и обратной):

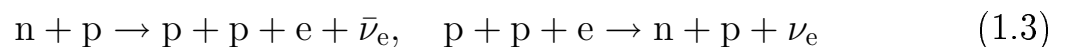


где  $\nu_e$  и  $\bar{\nu}_e$  – электронное нейтрино и антинейтрино. Он разрешен (Латтимер и др. [91]) только в веществе достаточно высокой плотности (как правило, несколько  $\rho_0$ ) для модельных уравнений состояния ядерной материи с высокой энергией симметрии (довольно большим содержанием протонов). Энерговыделение этого процесса для несверхтекучего вещества может быть оценено как [91]:  $Q \sim 10^{27} (T/10^9)^6$  эрг см<sup>-3</sup> с<sup>-1</sup> (точное выражение дается формулой 3.10). Этот процесс (если он открыт) является наиболее мощным процессом нейтринного энерговыделения в нейтронных звездах. Подавление прямого урка-процесса протонной сверхтекучестью А и нейтронной сверхтекучестью А, В или С было проанализировано Левенфиш и Яковлевым [94].

(2) Модифицированный урка-процесс состоит из двух ветвей. Две реакции



составляют *нейтронную ветвь*. Две аналогичных реакции



составляют *протонную ветвь* процесса. Это – наиболее мощный механизм нейтринного излучения в несверхтекучих ядрах нейтронных звезд, в которых прямой урка-процесс запрещен. Он (или как минимум его нейтронная ветвь) открыт во всем ядре нейтронной звезды.

Темп нейтринного энерговыделения для этого процесса был изучен рядом авторов (ссылки могут быть найдены в обзоре Яковлева и др. [176]), в основном, в работах Бакала и Вольфа [15], Фримана и Максвелла [152], и Яковлева и Левенфиш [175]. Нейтринное энерговыделение протонной и нейтронной ветвей модифицированного урка-процесса для несверхтекучего вещества с плотностью  $\rho \sim \rho_0$  оценивается как:  $Q \sim 10^{22} (T/10^9)^8$  эрг см<sup>-3</sup> с<sup>-1</sup> (точное выражение дается формулами 4.8 и 4.9).

Яковлев и Левенфиш [175] рассмотрели подавление модифицированного урка-процесса сверхтекучестью протонов типа А, или нейтронной сверхтекучестью А или В. Левенфиш и Яковлев [95] предложили простой приближенный метод для учета совместной сверхтекучести нейтронов и протонов. Он основан на критериях подобия факторов, описывающих подавление нейтринного энерговыделения сверхтекучестью прямого и модифицированного урка-процессов. Эти результаты были использованы при моделировании остывания нейтронных звезд (подробнее см. Яковлев и др. [176, 179]). В данной главе мы рассмотрим точные факторы подавления модифицированного урка-процесса совместной протонной сверхтекучестью А и нейтронной сверхтекучестью А, В или С.

(3) Излучение нейтринных пар при нуклон-нуклонных столкновениях. Реакция может быть трех типов в зависимости от того, какие нуклоны принимают в ней участие:

$$n + n \rightarrow n + n + \nu + \bar{\nu}, \quad (1.4)$$

$$n + p \rightarrow n + p + \nu + \bar{\nu}, \quad (1.5)$$

$$p + p \rightarrow p + p + \nu + \bar{\nu}. \quad (1.6)$$

Здесь  $\nu$  и  $\bar{\nu}$  – нейтрино и антинейтрино любого типа ( $\nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau$ ). В нормальном (несверхтекучем) веществе эти процессы слабее, чем модифицированный урка-процесс [176]:  $Q \sim (10^{19} - 10^{20}) (T/10^9)^8$  эрг см<sup>-3</sup> с<sup>-1</sup>. Однако, они могут быть значительно более важны в сверхтекучем веществе. Для протонной сверхтекучести типа А и нейтронной сверхтекучести типа А или В подавление сверхтекучестью процессов (1.4) – (1.6) может быть описано формулами, представленными Яковлевым и др. [176]. Мы предложим ана-

логичное описание для случая нейтронной сверхтекучести С.

(4) Излучение нейтрино при куперовском спаривании нуклонов ( $N = n$  или  $p$ ) представляет собой излучение нейтринной пары (любого типа),

$$N \rightarrow N + \nu + \bar{\nu}, \quad (1.7)$$

нуклоном, дисперсионное соотношение которого содержит щель. Процесс был впервые предложен Флауэрсом и др. [150] для нейтронной сверхтекучести типа А. Обобщение на случай нейтронной сверхтекучести В и С проведено Яковлевым и др. [177]. Нейтринное энерговыделение этого процесса по порядку величины равно (точное выражение дается формулой 2.1):  $Q \sim 10^{21} (T/10^9)^7 F(\tau)$  эрг см<sup>-3</sup> с<sup>-1</sup>, где  $\tau = T/T_c$ ;  $T_c$  – критическая температура возникновения сверхтекучести;  $F(\tau)$  – безразмерная функция, имеющая максимум  $F \sim 1$  при  $\tau \sim 0.4$ . Случай протонной сверхтекучести А описан, например, Яковлевым и др. [176, 179]. При отсутствии сверхтекучести излучение нейтрино при куперовском спаривании нуклонов запрещено законами сохранения энергии и импульса.

(5) Излучение нейтринных пар при электрон-электронном рассеянии (см. Джайкумар и др. [51]):

$$e + e \rightarrow e + e + \nu + \bar{\nu}. \quad (1.8)$$

Этот процесс слабее других нейтринных процессов в несверхтекучих ядрах нейтронных звезд.

Строгий учет влияния сверхтекучести протонов А и нейтронов А, В или С на нейтринное энерговыделение позволит успешно проводить моделирование остывания нейтронных звезд.

### 1.1.2 Модифицированный урка-процесс

В данном разделе рассчитаны факторы подавления модифицированного урка-процесса совместной сверхтекучестью протонов типа А и сверхтекучестью нейтронов типов А, В и С.

Как обсуждалось, например, в работах Бакала и Вольфа [15] и Фримана и Максвелла [152], общее выражение для скорости нейтринных потерь энергии в модифицированном урка-процессе может быть записано в виде ( $\hbar = c = k_B = 1$ ):

$$Q = 2 \int \left[ \prod_{j=1}^4 \frac{d^3 p_j}{(2\pi)^3} \right] \frac{d^3 p_e}{2\varepsilon_e (2\pi)^3} \frac{d^3 p_\nu}{2\varepsilon_\nu (2\pi)^3} \varepsilon_\nu \times (2\pi)^4 \delta(E_f - E_i) \delta(\mathbf{P}_f - \mathbf{P}_i) \frac{\mathcal{L}}{2} \sum_{\text{spins}} |M|^2, \quad (1.9)$$

где  $\mathbf{p}_j$  – импульсы нуклонов ( $j = 1, 2, 3, 4$ );  $\mathbf{p}_e$  и  $\varepsilon_e$  – импульс и энергия электрона;  $\mathbf{p}_\nu$  и  $\varepsilon_\nu$  – импульс и энергия нейтрино. Дельта-функция  $\delta(E_f - E_i)$  описывает закон сохранения энергии, а  $\delta(\mathbf{P}_f - \mathbf{P}_i)$  – закон сохранения импульса. Индексы  $i$  и  $f$  обозначают начальное и конечное состояния частиц. Далее,  $\mathcal{L}$  – произведение функций распределения Ферми–Дирака или соответствующих блокировочных факторов для нуклонов и электрона;  $|M|^2$  – квадрат модуля матричного элемента. Суммирование ведется по спинам всех частиц. Фактор 2 в знаменателе перед знаком суммы введен для того, чтобы не учитывать одни и те же столкновения тождественных частиц дважды. Фактор 2 перед знаком интеграла учитывает вклад в энерговыделение прямой и обратной реакций. Эти вклады равны при бета-равновесии. Используя то, что нейтроны, протоны и электроны в недрах нейтронных звезд сильно вырождены, можно записать скорость потерь энергии в виде (см., например, Фриман и Максвелл [152]):

$$Q = \frac{1}{4(2\pi)^{14}} T^8 A I \prod_{j=1}^5 p_{Fj} m_j^* \sum_{\text{spins}} |M|^2, \quad (1.10)$$

$$A = 4\pi \left[ \prod_{j=1}^5 \int d\Omega_j \right] \delta \left( \sum_{j=1}^5 \mathbf{p}_j \right), \quad (1.11)$$

$$I = \int_0^\infty dx_\nu x_\nu^3 \left[ \prod_{j=1}^5 \int_{-\infty}^{+\infty} dx_j f_j \right] \delta \left( \sum_{j=1}^5 x_j - x_\nu \right). \quad (1.12)$$

Величина  $A$  содержит интегралы по направлениям импульсов частиц

(значение  $j = 5$  соответствует электрону);  $d\Omega_j$  – элемент телесного угла в направлении  $\mathbf{p}_j$ . Модули импульсов  $\mathbf{p}_j$  ( $j \leq 5$ ) всех нуклонов и электрона в дельта-функции следует положить равными их фермиевским импульсам. Типичный импульс нейтрино  $p_\nu \sim T$  много меньше ферми-импульсов  $p_{Fj}$  других частиц. Поэтому им можно пренебречь в законе сохранения импульса и проинтегрировать по направлениям вылета нейтрино в  $A$  (что приводит к появлению множителя  $4\pi$ ). Величина  $I$ , даваемая формулой (1.12), включает интегралы по безразмерным энергиям нейтрино  $x_\nu = p_\nu/T = \varepsilon_\nu/T$  и остальных частиц  $x_j = v_{Fj}(p - p_{Fj})/T$ , где  $v_{Fj}$  – их ферми-скорость;  $f_j = [\exp(x_j) + 1]^{-1}$ . Наконец, выражение (1.10) содержит плотности числа состояний на ферми-поверхностях частиц сорта  $1 \leq j \leq 5$  с эффективными массами  $m_j^*$ . Для электронов ( $j=5$ ) имеем  $m^* = \mu$ , где  $\mu$  – их химический потенциал. В несверхтекучем веществе формулу (1.12) можно переписать в виде  $I = I_0 = 11513 \pi^8 / 120960$ . Для нейтронной ветви (1.2) процесса выражение (1.11) дает (см., например, Шапиро и Тьюкольски [170]):

$$A_0^n = \frac{2\pi (4\pi)^4}{p_{Fn}^3}. \quad (1.13)$$

Это результат верен, если  $p_{Fn} > p_{Fp} + p_{Fe}$ . В противном случае  $A_0^n$  дается формулой (13) работы Яковлева и Левенфиш [175], но при этом модифицированный урка-процесс становится несущественным, поскольку доминирует прямой урка-процесс.

Для протонной ветви (1.3) модифицированного урка-процесса при  $p_{Fn} \geq 3p_{Fp} - p_{Fe}$  имеем:

$$A_0^p = \frac{2(2\pi)^5}{p_{Fn} p_{Fp}^3 p_{Fe}} (p_{Fe} + 3p_{Fp} - p_{Fn})^2 \Theta, \quad (1.14)$$

тогда как для  $p_{Fn} < 3p_{Fp} - p_{Fe}$  (при условии  $3p_{Fp} \geq p_{Fe}$ )

$$A_0^p = \frac{2^3(2\pi)^5}{p_{Fp}^2} \left( \frac{3}{p_{Fn}} - \frac{1}{p_{Fp}} \right) \Theta, \quad (1.15)$$

где  $\Theta = 1$ , если протонная ветвь процесса разрешена законом сохранения импульса ( $p_{Fn} \leq 3p_{Fp} + p_{Fe}$ ), и  $\Theta = 0$  – если запрещена. Заметим, что выражение (1.15) может оказаться полезным в том случае, если в сверхплотном



ядерном веществе помимо  $n$ ,  $p$ , и  $e$  содержатся другие частицы (например, мюоны).

Различие выражений (1.13) и (1.14) или (1.15) объясняется тем, что в ядрах нейтронных звезд  $p_{\text{Fn}}$  много больше чем  $p_{\text{Fp}}$ .

Используя приведенные выше формулы, можно рассчитать скорости нейтринных потерь энергии  $Q_0^n$  и  $Q_0^p$  в несверхтекучем веществе. Для нейтронной ветви процесса величина  $Q_0^n$  была вычислена Фриманом и Максвеллом [152]. Для определения матричного элемента  $|M|^2$  авторы использовали приближение однопионного обмена. Для протонной ветви процесса величина  $Q_0^p$  была вычислена в том же приближении Яковлевым и Левенфиш [175].

Рассмотрим теперь модифицированный урка-процесс при наличии сверхтекучести протонов и нейтронов. Возникновение сверхтекучести приводит к появлению энергетической щели  $\delta$  в зависимости энергии нуклонов от импульса,  $\varepsilon(\mathbf{p})$ . Вблизи ферми-поверхности ( $|p - p_F| \ll p_F$ ) эта зависимость может быть представлена в виде (см., например, Лифшиц и Питаевский [101]):

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \mu - \sqrt{\delta^2 + \eta^2} & p < p_F, \\ \varepsilon &= \mu + \sqrt{\delta^2 + \eta^2} & p \geq p_F. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Здесь  $\eta = v_F(p - p_F)$ ,  $v_F$  и  $p_F$  – ферми-скорость и ферми-импульс нуклонов;  $\mu$  – их химический потенциал, причем для интересующих нас условий  $\delta \ll \mu$ . Далее,  $\delta^2 = \Delta^2(T)F(\vartheta)$ , где  $\Delta(T)$  – амплитуда, определяющая зависимость ширины щели от температуры  $T$ , а  $F(\vartheta)$  – множитель, зависящий от угла  $\vartheta$  между осью квантования и импульсом частицы. Функции  $\Delta(T)$  и  $F(\vartheta)$  зависят от типа сверхтекучести (см., например, Яковлев и др. [176]). Для случаев А, В и С:

$$F_A(\vartheta) = 1, \quad T_{cA} = 0.5669 \Delta(0); \quad (1.17)$$

$$F_B(\vartheta) = 1 + 3 \cos^2 \vartheta, \quad T_{cB} = 0.8416 \Delta(0); \quad (1.18)$$

$$F_C(\vartheta) = \sin^2 \vartheta, \quad T_{cC} = 0.4926 \Delta(0). \quad (1.19)$$

Амплитуда щели определяется уравнением теории БКШ (см., например, Лифшиц и Питаевский [101]; Тамагаки [138]). Зная  $\Delta(0)$ , можно вычислить критическую температуру  $T_c$ .

Для дальнейшего изложения удобно ввести следующие безразмерные величины:

$$\begin{aligned} z &= \frac{\varepsilon - \mu}{T} = \text{sign}(x) \sqrt{x^2 + y^2}, \\ x &= \frac{\eta}{T}, \quad y = \frac{\delta}{T}, \quad v = \frac{\Delta(T)}{T}. \end{aligned} \quad (1.20)$$

При уменьшении  $T$  от  $T_c$  до 0, параметр  $v$  изменяется от 0 до  $\infty$ . Зависимость  $v(T)$  дается, например, формулой (11) работы Яковлева и др. [176].

Предположим, что скорость нейтринных потерь энергии в сверхтекучем веществе может быть вычислена с помощью выражений (1.10)–(1.12) при замене  $x_j \rightarrow z_j$  для всех сверхтекучих частиц. Такое предположение широко используется в литературе; справедливость его обсуждается в работе Яковлева и др. [179]. В этом приближении нейтринные потери энергии для модифицированного урка-процесса могут быть записаны в виде:

$$Q^n = Q_0^n R^n, \quad Q^p = Q_0^p R^p, \quad (1.21)$$

где  $Q_0^n$  и  $Q_0^p$  – потери энергии в несверхтекучем веществе, а  $R^n$  и  $R^p$  – факторы подавления процесса сверхтекучестью нуклонов ( $R^N < 1$ ). В общем случае эти факторы выглядят так:

$$\begin{aligned} R^N &= \frac{J_N}{I_0^N A_0^N}, \\ J_N &= 4\pi \int \prod_{j=1}^5 d\Omega_j \int_0^\infty dx_\nu x_\nu^3 \left[ \prod_{j=1}^5 \int_{-\infty}^{+\infty} dx_j f(z_j) \right] \\ &\times \delta \left( x_\nu - \sum_{j=1}^5 z_j \right) \delta \left( \sum_{j=1}^5 \mathbf{p}_j \right). \end{aligned} \quad (1.22)$$

Здесь использованы те же обозначения, что и в формулах (1.10)–(1.12).

Факторы подавления (1.22) для случаев протонной сверхтекучести типа А и нейтронной сверхтекучести типа А, В или С рассчитывались численно. Программа расчета тестировалась путем сравнения с аналитическими асимптотиками, полученными при больших значениях параметров  $v_1$  и  $v_2$ , и с результатами работы Яковлева и Левенфиш [175], где рассматривалась сверхтекучесть нуклонов какого-либо одного сорта (протонов или нейтронов). Результаты также сравнивались с вычислениями, проведенными по

формуле (1.22), но в предположении  $p_{\text{Фр}}, p_{\text{Фе}} \ll p_{\text{Фн}}$ , которое обсуждается ниже: см. выражение (1.36).

Заметим, что результаты этого раздела могут быть применены также для описания модифицированного урка-процесса с участием мюонов вместо электронов (это вопрос более подробно рассмотрен Яковлевым и др. [179]).

*Подавление модифицированного урка-процесса сверхтекучестью  
нейтронов и протонов типа А*

В этом случае выражение (1.22) может быть упрощено. Для спаривания А безразмерная энергетическая щель  $u_A$  не зависит от углов. Это позволяет расцепить интеграл по углам с интегралом по безразмерным энергиям  $x_j$ . В результате для нейтронной ветви модифицированного урка-процесса получим:

$$R_{AA}^n = \frac{120960}{11513\pi^8} \left[ \prod_{j=1}^4 \int_{-\infty}^{+\infty} dx_j f(z_j) \right] G(z_1 + z_2 + z_3 + z_4), \quad (1.23)$$

$$G(a) \equiv \int_{-a}^{+\infty} dx \frac{(x+a)^3}{1+e^x}, \quad (1.24)$$

где  $j = 1, 2$  и  $3$  нумерует нейтроны; индекс  $j = 4$  отвечает протону.

В дальнейшем за  $v_1 \equiv v_n$  обозначим безразмерную амплитуду щели нейтрона; за  $v_2 \equiv v_p$  – безразмерную амплитуду щели протона. Фактор подавления протонной ветви будет, очевидно, даваться формулой:

$$R_{AA}^p(v_1, v_2) = R_{AA}^n(v_2, v_1). \quad (1.25)$$

Прежде чем численно вычислять фактор подавления (1.23), полезно найти его асимптотики при больших значениях параметров  $v_1$  и  $v_2$ . Для этого нужно выделить три области (см. рис. 1.1), в каждой из которых асимптотики  $R_{AA}^n$  различны. Область I соответствует значению параметров  $v_1 > v_2$ ; в области II имеем  $v_2 \geq v_1 \geq v_2/3$ ; в области III имеем  $v_1 < v_2/3$ . Приведенные ниже асимптотики справедливы при условии  $(v_1 - v_2)^2 \gg v_1$  и  $(v_2 - 3v_1)^2 \gg v_2$ , то есть не слишком близко к границам между областями I и II и между областями II и III.

Для примера, из формулы (1.23) получим асимптотику  $R_{AA}^n$  для области I. В остальных областях вычисления аналогичны. Ясно, что интеграл (1.23) можно разбить на несколько частей, каждая из которых содержит интегрирование от  $-\infty$  до 0 и/или от 0 до  $+\infty$ . Введем теперь удобные обозначения для этих частей. Например, за  $R(2, -1)$  обозначим пятикратный интеграл, в котором по двум нейтронным переменным ведется интегрирование от 0 до  $+\infty$ , а по протонной переменной от  $-\infty$  до 0 (причем по оставшейся нейтронной переменной также интегрируется от  $-\infty$  до 0). При разбиении исходного интеграла (1.23), интеграл типа  $R(2, -1)$  встречается в получившейся сумме трижды. Мы учтем это впоследствии, домножив асимптотику на 3.

Всего встречается восемь интегралов различных типов:  $R(3, +1)$ ,  $R(3, -1)$ ,  $R(2, +1)$ ,  $R(2, -1)$ ,  $R(1, +1)$ ,  $R(1, -1)$ ,  $R(0, +1)$  и  $R(0, -1)$ . Ясно, что при сильной сверхтекучести ( $v_{1,2} \gg 1$ ) каждый из интегралов экспоненциально мал. Легко определить показатели экспонент:

$$\begin{aligned} R(3, +1) &\propto \exp(-3v_1 - v_2), & R(1, +1) &\propto \exp(-2v_1), \\ R(3, -1) &\propto \exp(-3v_1), & R(1, -1) &\propto \exp(-2v_1 - v_2), \\ R(2, +1) &\propto \exp(-2v_1 - v_2), & R(0, +1) &\propto \exp(-3v_1), \\ R(2, -1) &\propto \exp(-2v_1), & R(0, -1) &\propto \exp(-3v_1 - v_2). \end{aligned}$$

Отсюда видно, что асимптотику для коэффициента нейтринных потерь энергии задают интегралы  $R(2, -1)$  и  $R(1, +1)$ . Несмотря на одинаковую экспоненциальную зависимость, предэкспонента в  $R(2, -1)$  оказывается значительно больше. Поэтому в первой области член  $R(2, -1)$  дает главный вклад в асимптотику:

$$\begin{aligned} R(2, -1) &= \frac{120960}{11513\pi^8} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} dx_1 f(z_1) dx_2 f(z_2) \\ &\quad \times \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^0 dx_3 f(z_3) dx_4 f(z_4) G(a), \end{aligned} \quad (1.26)$$

где  $a = z_1 + z_2 + z_3 + z_4$ . Интеграл (1.24) представляет собой известную в математике функцию полилогарифм. Легко видеть, что  $G(a) \rightarrow a^4/4$  при  $a \rightarrow \infty$ , и  $G(a) \rightarrow 6 \exp(a)$  при  $a \rightarrow -\infty$ . Для нас интересны именно боль-

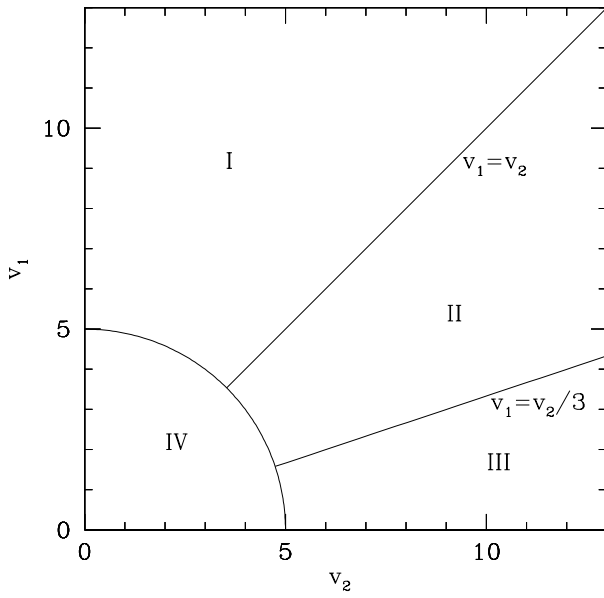


Рис. 1.1: Четыре области значений параметров  $v_1 = v_n$  и  $v_2 = v_p$ , где фактор подавления  $R^N$  нейтронной и протонной ветвей модифицированного урка-процесса может быть аппроксимирован различными выражениями. В областях I, II и III асимптотики фактора подавления  $R^n$  нейтронной ветви при  $v_1 \gg 1$  и  $v_2 \gg 1$  различны.

шие положительные значения  $a$ , для которых функция  $G(a)$  может быть аппроксимирована как  $G(a) \approx a^4 \theta(a)/4$ , где  $\theta(x)$  – ступенчатая функция. В таком приближении формула (1.26) может быть переписана в виде:

$$R(2, -1) = \frac{120960}{11513\pi^8} \int_0^{+\infty} dx_1 f(z_1) dx_2 f(z_2) \times \int_{-\infty}^0 dx_3 f(z_3) dx_4 f(z_4) \frac{a^4}{4} \theta(a). \quad (1.27)$$

Заметим, что два интеграла в (1.27) сходятся очень хорошо благодаря наличию экспоненциально убывающей функции. Это означает, что область, в которой эти переменные вносят существенный вклад, мала. Поэтому в  $\theta$ -функции можно положить  $z_1 = v_1$  и  $z_2 = v_1$ . Тогда интегрирование по переменным  $x_1$  и  $x_2$  разделяется и проводится без труда. Пренебрегая экспонентами по сравнению с единицей при интегрировании по  $x_3$  и  $x_4$ , получаем

окончательную асимптотику  $R_{AA}^n$ , справедливую в области I:

$$R_{AA}^n = 3 \frac{120960}{11513\pi^8} \frac{\pi}{2} v_1^6 v_2 e^{-2v_1} I_1 \left( \frac{v_2}{v_1} \right), \quad (1.28)$$

$$I_1(\alpha) = \frac{1}{4} \int \int_0^{+\infty} dx_3 dx_4 (2 - r_3 - \alpha r_4)^4 \times \theta(2 - r_3 - \alpha r_4), \quad 0 < \alpha \leq 1, \quad (1.29)$$

где  $r_j = \sqrt{x_j^2 + 1}$ .

Аналогично, в области II получаем:

$$R_{AA}^n = 3 \frac{120960}{11513\pi^8} \frac{\pi}{2} v_1^{13/2} v_2^{1/2} e^{-v_1 - v_2} I_2 \left( \frac{v_2}{v_1} \right) + \frac{120960}{11513\pi^8} \left( \frac{\pi}{2} \right)^{3/2} v_1^{3/2} e^{-3v_1} K, \quad (1.30)$$

$$I_2(\alpha) = \frac{1}{4} \int \int_0^{+\infty} dx_1 dx_2 (1 + \alpha - r_1 - r_2)^4 \times \theta(1 + \alpha - r_1 - r_2), \quad 1 \leq \alpha \leq 3, \quad (1.31)$$

$$K = \frac{\sqrt{9v_1^2 - v_2^2}}{120} (486v_1^4 + 747v_1^2 v_2^2 + 16v_2^4) - \frac{3}{8} v_1 v_2^2 (3v_2^2 + 36v_1^2) \ln \frac{3v_1 + \sqrt{9v_1^2 - v_2^2}}{v_2}. \quad (1.32)$$

В области III:

$$R_{AA}^n = \frac{120960}{11513\pi^8} \left( \frac{\pi}{2} \right)^{1/2} v_1^3 v_2^{9/2} e^{-v_2} I_3 \left( \frac{v_2}{v_1} \right), \quad (1.33)$$

$$I_3(\alpha) = \frac{1}{4} \int \int \int_0^{+\infty} dx_1 dx_2 dx_3 \left[ 1 - \frac{1}{\alpha} (r_1 + r_2 + r_3) \right]^4 \times \theta(\alpha - r_1 - r_2 - r_3), \quad (1.34)$$

где  $3 \leq \alpha < \infty$ .

Полученные асимптотики сами по себе содержат довольно сложные интегралы  $I_1(\alpha)$ ,  $I_2(\alpha)$  и  $I_3(\alpha)$ . Эти интегралы рассчитаны в работе Гусакова [36]. Аппроксимационные формулы для фактора подавления  $R_{AA}^n$  приведены в Приложении 1.

*Подавление нейтронной ветви модифицированного урка-процесса  
протонной сверхтекучестью А и нейтронной сверхтекучестью В*

Рассмотрим теперь сверхтекучесть нейтронов типа В. Из (1.20) и (1.18) следует, что их энергетическая щель  $y_B$  будет зависеть от углов. Для получения асимптотик фактора подавления  $R_{AB}^n$  в этом случае удобно исходить из формулы (1.22). Как и раньше, индексами  $j=1, 2$  и  $3$  будем нумеровать нейтроны; индекс  $j=4$  отвечает протону. В результате формулу (1.22) можно переписать в виде:

$$\begin{aligned}
 R_{AB}^n &= \frac{120960}{11513\pi^8} \frac{1}{(4\pi)^3} \frac{p_{Fn}^3}{p_{Fe}p_{Fp}} \int \frac{d\Omega_1 d\Omega_2 d\Omega_3}{|\mathbf{p}_{Fn1} + \mathbf{p}_{Fn2} + \mathbf{p}_{Fn3}|} \\
 &\quad \times I \theta(\mathbf{p}_{Fn1} + \mathbf{p}_{Fn2} + \mathbf{p}_{Fn3}), \\
 I &= \left[ \prod_{j=1}^4 \int_{-\infty}^{+\infty} dx_j f(z_j) \right] G(z_1 + z_2 + z_3 + z_4), \\
 G(a) &\equiv \int_{-a}^{+\infty} dx \frac{(x+a)^3}{1+e^x}. \tag{1.35}
 \end{aligned}$$

где  $G(a)$  дается формулой (1.24);  $\theta$  – ступенчатая функция:  $\theta = 1$  если  $|p_{Fe} - p_{Fp}| \leq |\mathbf{p}_{Fn1} + \mathbf{p}_{Fn2} + \mathbf{p}_{Fn3}| \leq p_{Fe} + p_{Fp}$ , иначе  $\theta = 0$ .

Расчеты показывают, что фактор подавления слабо чувствителен к изменению ферми-импульсов протонов и нейтронов. Поэтому имеет смысл рассмотреть упрощенное выражение для  $R_{AB}^n$ , положив  $p_{Fp} = p_{Fe} = 0$  в выражении (1.22) и проинтегрировав по телесным углам  $d\Omega_p$  и  $d\Omega_e$ . В результате получим:

$$\begin{aligned}
 R_{AB}^n &= \frac{120960}{11513\pi^8} \frac{p_{Fn}^3}{2(2\pi)^2} \int \prod_{j=1}^3 d\Omega_j \delta \left( \sum_{j=1}^3 \mathbf{p}_j \right) \\
 &\quad \times \left[ \prod_{j=1}^5 \int_{-\infty}^{+\infty} dx_j f(z_j) \right] G(z_1 + z_2 + z_3 + z_4). \tag{1.36}
 \end{aligned}$$

Как и для нейтронной сверхтекучести А, асимптотики  $R_{AB}^n$  в областях I, II и III будут отличаться. Например, получим асимптотики при больших  $v_1$  и  $v_2$  в области I. Легко видеть, что основной вклад вносит член  $R(2, -1)$  (см. (1.27)). При этом в формуле (1.27) надо положить  $z_j = \text{sign}(x_j) \sqrt{x_j^2 + v_1^2(1 + 3c_j^2)}$  (для  $j=1, 2, 3$ ) и  $z_4 = \text{sign}(x_4) \sqrt{x_4^2 + v_2^2}$ . Здесь

введено обозначение  $c_j \equiv \cos \vartheta_j$ . Тогда упрощенный фактор подавления перепишется в виде:

$$R_{\text{AB}}^{\text{n}} = \frac{3}{2(2\pi)^2} \int_{-1}^1 dc_1 dc_2 dc_3 D(c_1, c_2, c_3) R(2, -1), \quad (1.37)$$

$$D(c_1, c_2, c_3) \equiv \int_0^{2\pi} d\varphi_1 d\varphi_2 d\varphi_3 \delta \left( \sum_{j=1}^3 \frac{\mathbf{p}_j}{p_{\text{Fn}}} \right)$$

$$= \frac{4\pi \theta(0.75 - c_1 c_2 - c_1^2 - c_2^2)}{\sqrt{0.75 - c_1 c_2 - c_1^2 - c_2^2}} \delta(c_1 + c_2 + c_3).$$

Далее заметим, что основной вклад в интеграл (1.37) вносит область  $c_1 \approx c_2 \approx 0$ . Тогда, записав  $z_1$  и  $z_2$  в экспонентах  $R(2, -1)$  в виде:  $z_i \approx v_1 + 0.5x_i^2 v_1^{-1} + 1.5c_i^2 v_1$  ( $i = 1, 2$ ), а во всех остальных функциях положив  $z_1 = z_2 = v_1$ , получаем асимптотику в области I:

$$R_{\text{AB}}^{\text{n}} = 3 \frac{120960}{11513\pi^8} \frac{\pi}{3\sqrt{3}} v_1^5 v_2 e^{-2v_1} I_1 \left( \frac{v_2}{v_1} \right), \quad (1.38)$$

где  $I_1(\alpha)$  определяется формулой (1.29). Введем теперь три функции  $I_i(c_1, c_2, c_3, \alpha)$  ( $i = 1, 2$  и  $3$ ), формально совпадающие с выражениями (1.29), (1.31) и (1.34) с той лишь разницей, что теперь  $r_j = \sqrt{x_j^2 + 1 + 3c_j^2}$ ,  $j=1, 2$  и  $3$ .

С использованием этих функций асимптотика в области II запишется в виде:

$$R_{\text{AB}}^{\text{n}} = 3 \frac{120960}{11513\pi^8} \frac{\pi^{-1/2}}{8\sqrt{6}} v_1^6 v_2^{1/2} e^{-v_1 - v_2}$$

$$\times \int_{-1}^1 dc_1 dc_2 D(c_1, c_2, 0) I_2 \left( c_1, c_2, 0, \frac{v_2}{v_1} \right)$$

$$+ \frac{120960}{11513\pi^8} \frac{\pi^{3/2}}{3\sqrt{6}} v_1^{1/2} e^{-3v_1} K, \quad (1.39)$$

где  $K$  дается формулой (1.32). В области III имеем:

$$R_{\text{AB}}^{\text{n}} = \frac{120960}{11513\pi^8} \frac{\pi^{-3/2}}{8\sqrt{2}} v_1^3 v_2^{9/2} e^{-v_2}$$

$$\times \int_{-1}^1 dc_1 dc_2 dc_3 D(c_1, c_2, c_3) I_3 \left( c_1, c_2, c_3, \frac{v_2}{v_1} \right). \quad (1.40)$$



В случае умеренных значений параметров  $v_1$  и  $v_2$  величину  $R_{AB}^n$  нужно численно рассчитывать по формуле (1.35), что и было сделано. Расчеты проводились для значений ферми-импульсов протона  $p_{\text{Фр}} = 0.11 p_{\text{Фн}}$  и электрона  $p_{\text{Фе}} = 0.1 p_{\text{Фн}}$ . Однако, как уже упоминалось выше, фактор подавления слабо чувствителен к вариациям  $p_{\text{Фр}}$  и  $p_{\text{Фе}}$ . Изменение  $R_{AB}^n$  не превосходит ошибку численного интегрирования при варьировании ферми-импульсов частиц в пределах  $p_{\text{Фе,р}} \leq (0.3 - 0.4)p_{\text{Фн}}$ .

Асимптотики факторов подавления  $R_{AC}^n$  и  $R_{AC}^p$  нейтронной и протонной ветвей модифицированного урка-процесса сверхтекучестью нейтронов типа С и сверхтекучестью протонов типа А, равно как и асимптотика фактора подавления  $R_{AB}^p$ , рассматриваются аналогично (см. Гусаков [36]).

Аппроксимационные формулы для факторов подавления  $R_{AB}^n$ ,  $R_{AB}^p$ ,  $R_{AC}^n$ ,  $R_{AC}^p$  даны в Приложении 1.

### 1.1.3 Приближенные факторы подавления нейтринного излучения при нуклон-нуклонном рассеянии в сверхтекучем веществе

В этом разделе мы обсудим влияние сверхтекучести на нейтринное энерговыделение, обусловленное процессами нуклон-нуклонного рассеяния (1.4) – (1.6). Выражение для скорости нейтринных потерь энергии при NN-рассеянии в отсутствие сверхтекучести в приближении однопионного обмена можно найти, например, в обзоре Яковлева и др. [176].

По аналогии с выражением (1.21) можно ввести сверхтекучие факторы подавления  $R^{\text{NN}}$ :

$$Q_{\text{NN}} = Q_{\text{NN0}} R^{\text{NN}}, \quad (1.41)$$

где

$$R^{\text{NN}} = \frac{945}{164\pi^8} \frac{p_{\text{Фн}}^3}{32\pi^3} \int \prod_{j=1}^4 d\Omega_j \delta\left(\sum_{j=1}^4 \mathbf{p}_j\right) I^{\text{NN}},$$

$$I^{\text{NN}} = \int_0^\infty dx_\nu x_\nu^4 \left[ \prod_{j=1}^4 \int_{-\infty}^{+\infty} dx_j f(z_j) \right] \times \delta(z_1 + z_2 + z_3 + z_4 - x_\nu). \quad (1.42)$$

Здесь  $z_j$  дается формулой (1.20);  $j$  нумерует начальные и конечные

состояния частиц, принимающих участие в реакции. Соответственно, если мы рассмотрим нейтронную сверхтекучесть С и протонную сверхтекучесть А, то для нейтронов  $z_j = \text{sign}(x_j) \sqrt{x_j^2 + v_1^2 \sin^2 \vartheta_j}$ , а для протонов  $z_j = \text{sign}(x_j) \sqrt{x_j^2 + v_2^2}$ .

Фактор  $R_{AA}^{pp}$  был рассчитан в работе Яковлева и Левенфиш [175]. Используя его, для процесса нейтрон-протонного рассеяния можно предложить приближенное соотношение подобия в виде:

$$R_{AC}^{np} \approx \frac{R_{AC}^D(v_1, v_2)}{R_A^D(v_2)} R_{pA}^{np}(v_2). \quad (1.43)$$

Здесь  $R_{AC}^D(v_1, v_2)$  – фактор подавления прямого урка-процесса, определенный Левенфиш и Яковлевым [94]. Символы рА означают, что протоны находятся в состоянии сверхтекучести типа А (а нейтроны несверхтекучие). Фактор подавления  $R_{pA}^{np}$  был рассчитан Яковлевым и Левенфиш [175].

Анализ  $R_{nC}^{nn}$  для нейтрон-нейтронного рассеяния (1.4) значительно более сложен (поскольку на этот раз сформулировать критерии подобия затруднительно). Начнем изучение фактора подавления  $R_{nC}^{nn}$  с определения его асимптотики при больших  $v_1$  из формулы (1.42). Пусть теперь  $j = 1 - 4$  относится к нейтронам. Очевидно, основной вклад в  $R_{nC}^{nn}$  вносят углы, при которых  $\sin \vartheta_j \approx 0$ . Поскольку суммарный импульс нейтронов в реакции должен быть равен нулю (с точностью до импульса нейтринной пары  $p_{\nu, \bar{\nu}} \sim T \ll p_F$ ), импульсы нейтронов должны прижиматься к полюсам ферми-сферы: по два к каждому полюсу. Раскладывая теперь все функции в ряд по  $\vartheta_j$  и интегрируя последовательно по переменным  $\varphi_4, \varphi_3, \varphi_1$  и  $\vartheta_4$ , получим:

$$R_{nC}^{nn} = \frac{945}{164\pi^8} \frac{96\pi}{32\pi^3} \int_0^1 d\vartheta_1 d\vartheta_2 d\vartheta_3 \vartheta_1 I^{nn} \times \theta(\vartheta_2^2 + \vartheta_3^2 - \vartheta_1^2 \geq 0) \times \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(m^2-t^2)}} \theta(t \leq m), \quad (1.44)$$

$$m = \frac{\vartheta_1 \sqrt{\vartheta_2^2 + \vartheta_3^2 - \vartheta_1^2}}{\vartheta_2 \vartheta_3}. \quad (1.45)$$

В выражении (1.44)  $t = \cos \varphi_2$ ;  $I^{nn}$  практически совпадает с (1.42) с той лишь разницей, что теперь  $\vartheta_4 = \sqrt{\vartheta_2^2 + \vartheta_3^2 - \vartheta_1^2}$ . Вводя обозначения  $y_j = v_1 \vartheta_j$ ,

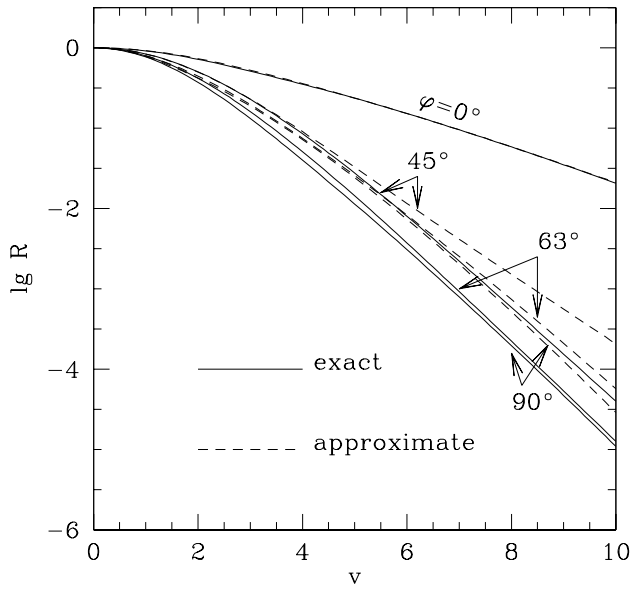


Рис. 1.2: Фактор подавления нейтринного энерговыделения сверхтекучестью нейтронов и протонов типа А для нейтронной ветви модифицированного урка-процесса в зависимости от параметра  $v$  ( $v_1 = v \sin \varphi$ ,  $v_2 = v \cos \varphi$ ) при  $\varphi = 0, 45, 63$  и  $90^\circ$ . Сплошными линиями показаны результаты данной работы; штрихами – результаты, полученные при использовании критериев подобия (см., например, Яковлев и др. [176]).

$j = 1, 2, 3$ , и принимая во внимание, что  $v_1$  велико, мы можем отнести верхний предел интегрирования по  $y_j$  на бесконечность. В результате асимптотика  $R_{nC}^{nn}$  принимает вид:

$$\begin{aligned}
 R_{nC}^{nn} &= \frac{945}{164\pi^8} \frac{96\pi}{32\pi^3} v_1^{-4} \int_0^\infty dy_1 dy_2 dy_3 y_1 I^{nn} \\
 &\times \theta(y_2^2 + y_3^2 - y_1^2 \geq 0) \\
 &\times \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(m^2-t^2)}} \theta(t \leq m). \tag{1.46}
 \end{aligned}$$

Численное интегрирование дает:

$$R_{nC}^{nn} = \frac{11.533}{v_1^4}. \tag{1.47}$$

На основе этой асимптотики можно предложить приближенную формулу для  $R_{nC}^{nn}$  при промежуточных  $v_1$ . Для этой цели подставим выражение

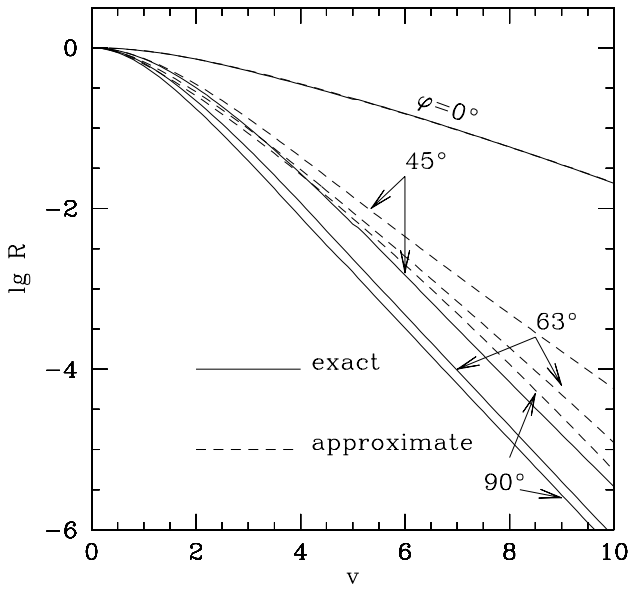


Рис. 1.3: То же, что на рис. 1.2, но для  $R_{AB}^n$ .

$\frac{f}{4} (y_1 + y_2 + y_3 + y_4)$ , где  $y_j = v_1 \sin \vartheta_j$ , в аргумент функции  $R_{nA}^{nn}(v_1)$  (выражение для функции приведено в работе Яковлева и др. [176]) и проинтегрируем эту функцию по углам  $\vartheta_j$ :

$$R_{nC}^{nn} \approx \prod_{j=1}^4 \left[ \int_0^1 d \sin \vartheta_j \right] R_{nA}^{nn} \left( \frac{f}{4} (y_1 + y_2 + y_3 + y_4) \right), \quad (1.48)$$

где величина  $f = 2.248$  выбрана так, чтобы удовлетворить асимптотике (1.47). При  $v_1 \leq 25$ , фактор  $R_{nC}^{nn}$  был рассчитан численно. При  $v_1 \gtrsim 25$  наши численные расчеты согласуются с асимптотикой (1.47) с точностью до 1%. Расчеты при  $v_1 \leq 25$  могут быть аппроксимированы следующей формулой:

$$R_{nC}^{nn} \approx \exp \left( - \frac{p_1 v_1^2}{(1 + p_2 v_1^2 + p_4 v_1^4)^{p_3}} \right), \quad (1.49)$$

где  $p_1 = 0.442995$ ,  $p_2 = 0.250953$ ,  $p_3 = 0.410517$ ,  $p_4 = 7.09171 \cdot 10^{-3}$ . Ошибка вычислений и аппроксимации не превосходит 2%.

#### 1.1.4 Обсуждение результатов

Результаты раздела 1.1.2 позволяют сравнить точные и приближенные факторы подавления модифицированного урка-процесса. Сравнение проведено

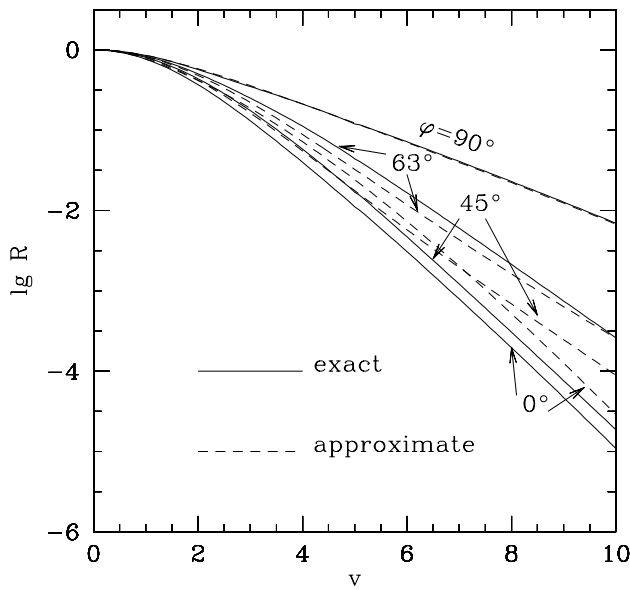


Рис. 1.4: То же, что на рис. 1.2, но для  $R_{AB}^p(v)$ .

на рис. 1.2, 1.3 и 1.4. На рисунках построена зависимость фактора подавления  $R_{AA}^n$ ,  $R_{AB}^n$  и  $R_{AB}^p$  от  $v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$  для нескольких значений угла  $\varphi$  ( $\varphi$  – полярный угол на плоскости  $v_1-v_2$ ;  $\text{tg}(\varphi) = (v_1/v_2)$ ). Наши результаты (показаны сплошными линиями) сравниваются с приближенными факторами подавления (штриховые линии), полученными (см., например, Яковлев и др. [176]) с использованием критериев подобия между факторами подавления различных нейтринных реакций. До сих пор при моделировании остывания нейтронных звезд использовались приближенные факторы. Видно, что отличие приближенных факторов от точных растет с увеличением  $v$  (кроме случаев, когда  $\varphi = 0^\circ$  на рис. 1.2, 1.3 и  $\varphi = 90^\circ$  на рис. 1.4).

Теперь исследуем вопрос о том, какой механизм генерации нейтрино доминирует в сверхтекучих ядрах нейтронных звезд. Учитывая полученные выше результаты, мы можем рассчитать нейтринное энерговыделение для всех основных нейтринных процессов (см. раздел 1) при наличии протонной сверхтекучести типа А и нейтронной сверхтекучести типа А, В или С. На рис. 1.5 и 1.6 показано, какой процесс доминирует при различных значениях  $T_{\text{сн}}$  и  $T_{\text{ср}}$ . Рисунок 1.5 построен для случая нейтронной сверхтекучести типа В, рис. 1.6 – для нейтронной сверхтекучести С. Оба рисунка построены

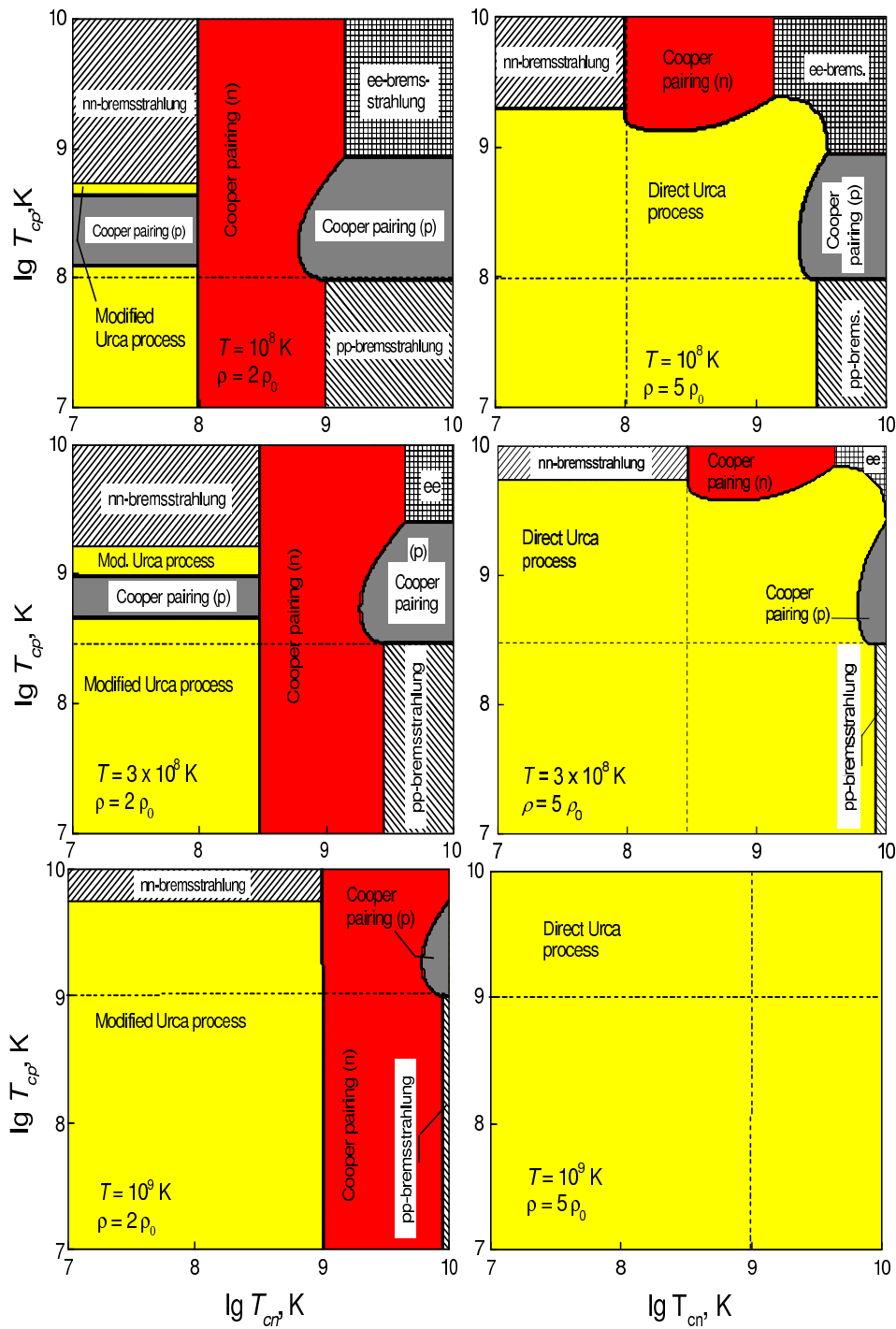


Рис. 1.5: Области значений критических температур  $T_{cn}$  сверхтекучести нейтронов (типа В) и критических температур  $T_{cp}$  сверхтекучести протонов (типа А), в которых доминируют различные процессы.

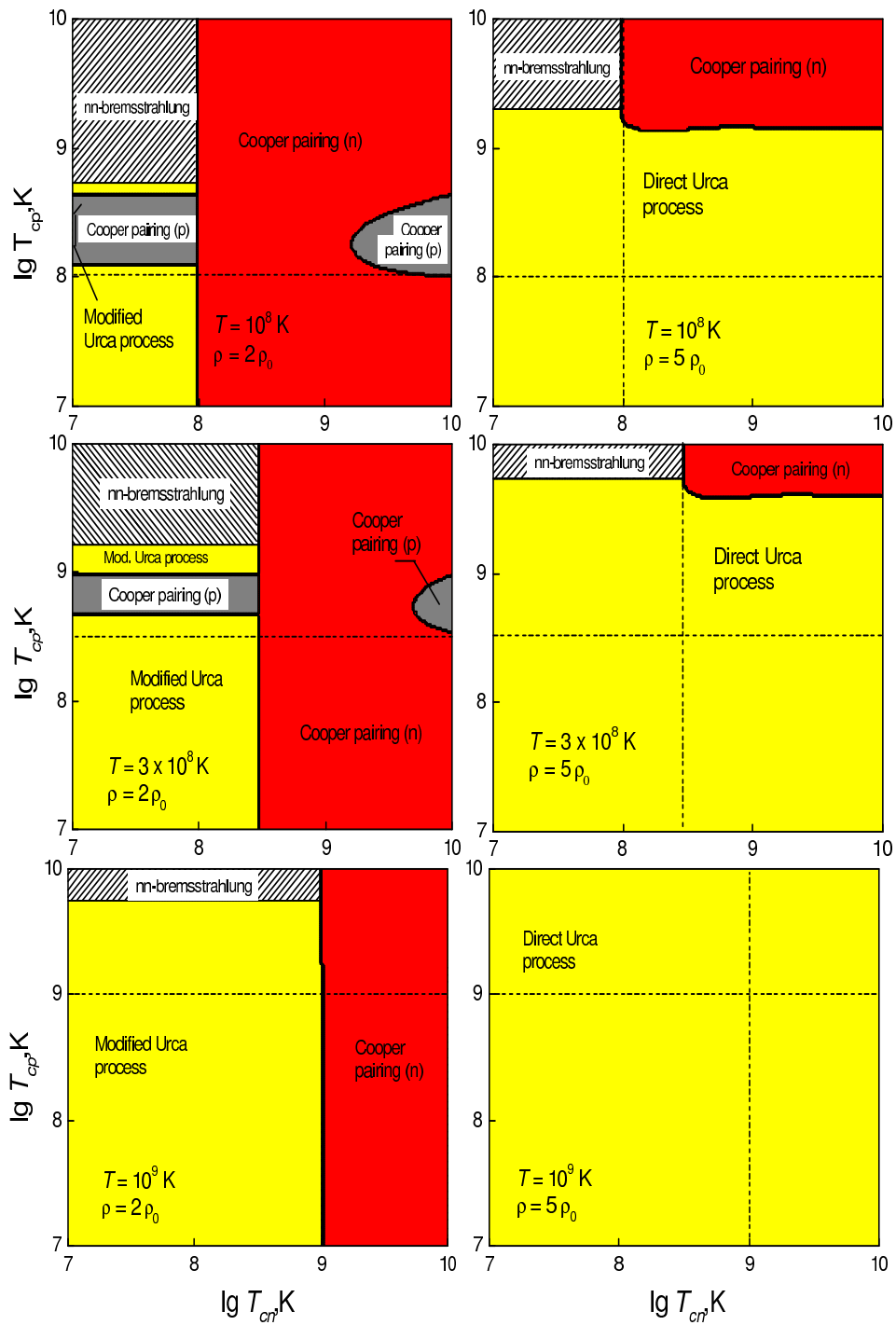


Рис. 1.6: Области значений критических температур  $T_{cn}$  сверхтекучести нейтронов (типа С) и критических температур  $T_{cp}$  сверхтекучести протонов (типа А), в которых доминируют различные процессы.

для уравнения состояния вещества, предложенного Пракашом и др. [126] (их модель I для энергии симметрии с модулем сжатия симметричной ядерной материи  $K = 240$  МэВ).

Три левых картинки на рис. 1.5 отвечают  $\rho = 2\rho_0$  (прямой урка-процесс запрещен) для трех температур вещества  $T = 10^8, 3 \times 10^8$  и  $10^9$  К. Три правых картинки соответствуют  $\rho = 5\rho_0$  (прямой урка-процесс разрешен) при тех же температурах. Рисунок 1.5 практически совпадает с полученным ранее Яковлевым и др. [176] для другого уравнения состояния с использованием *приближенных* факторов подавления модифицированного урка-процесса. Выбранные значения  $T$  покрывают интервал температур, наиболее важный для теории остывания нейтронных звезд. Нужно отметить, что рисунки практически не зависят от  $\rho$  (и от уравнения состояния) до тех пор, пока  $\rho$  не пересекает порог, при котором открывается прямой урка-процесс. Видно, что если сверхтекучи только нейтроны и  $T \ll T_{\text{сн}}$ , то доминирует реакция протон-протонного рассеяния. Если сверхтекучи только протоны, причем  $T \ll T_{\text{сп}}$ , то основным механизмом нейтринного энерговыделения является нейтрон-нейтронное рассеяние. При  $T \sim 0.4T_{\text{сн}}$  (если прямой урка-процесс запрещен), всегда доминирует куперовское спаривание нейтронов. Если прямой урка-процесс разрешен, то процесс излучения нейтрино при куперовском спаривании также может доминировать в том случае, когда сверхтекучесть нуклонов одного сорта сильная, а нуклонов другого сорта – промежуточная. Наконец, при сильной сверхтекучести протонов и нейтронов все процессы с участием нуклонов настолько сильно подавлены, что превалирует излучение нейтринных пар при электрон-электронном рассеянии. Рисунок 1.6 отличается от рис. 1.5, главным образом, увеличением роли нейтринного энерговыделения при куперовском спаривании нейтронов в случае  $\rho = 2\rho_0$  и роли прямого урка-процесса в случае  $\rho = 5\rho_0$ .

В несверхтекучем веществе при фиксированной плотности доминирует какой-либо один процесс – либо прямой урка-процесс, либо модифицированный урка-процесс. Ситуация резко меняется при включении сверхтекучести. Как видно из рис. 1.5 и 1.6, для плотности ядерного вещества ниже пороговой плотности включения прямого урка-процесса, наличие даже слабой



нейтронной сверхтекучести приводит к тому, что основным процессом нейтринного энерговыделения становится излучение нейтрино при куперовском спаривании нейтронов. При дальнейшем увеличении  $T_{\text{сн}}$  модифицированный урка-процесс становится полностью несущественным, так как доминирует процесс излучения нейтрино при куперовском спаривании нейтронов.

## 1.2 Симметрия эффектов сверхтекучести нейтронов и протонов в остывающих нейтронных звездах

Результаты предыдущих разделов позволяют провести моделирование остывания нейтронных звезд, используя надежные выражения для нейтринного энерговыделения сверхтекучего вещества в их ядрах. К настоящему времени существует много различных теоретических моделей, объясняющих наблюдения (см., например, Паж [119, 120], Цурута и др. [143], Ходель и др. [159], Блашке и др. [21], Яковлев и Петик [183], а также ссылки в этих работах). В зависимости от модели, вещество в ядрах нейтронных звезд предполагается состоящим из нуклонов (или нуклонов и гиперонов), пионного/каонного конденсата или кварков. Простейшая модель несверхтекучей нейтронной звезды с нуклонным ядром, которая остывает за счет нейтринного энерговыделения в ходе модифицированного урка-процесса (при закрытом прямом урка-процессе), не в состоянии удовлетворить наблюдениям: некоторые нейтронные звезды (например, PSR B1055–52) оказываются значительно горячее, в то время как другие (например, пульсар в созвездии Парусов [Vela]) оказываются холоднее, чем предсказывает данная модель. Горячие звезды могут быть объяснены (Каминкер и др. [64]) в предположении сильной протонной сверхтекучести в их ядре: такая сверхтекучесть подавляет модифицированный урка-процесс и замедляет остывание. Тем не менее, для объяснения холодных звезд требуется более мощный механизм остывания, чем модифицированный урка-процесс.

Для объяснения наблюдений холодных звезд в имеющихся моделях остывания обычно привлекается либо прямой урка-процесс в нуклонном (или нуклонном/гиперонном) веществе, либо аналогичные процессы в пионном/каонном конденсатах или в кварковом веществе внутренних слоев мас-

сивных нейтронных звезд. В данном разделе мы будем предполагать, что вещество ядер нейтронных звезд состоит из нейтронов, протонов и электронов. Соответственно, холодные нейтронные звезды будем интерпретировать как остывающие за счет прямого урка-процесса в нуклонном веществе.

Мы расширим класс моделей остывания, которые были предложены Каминкером и др. [64, 65] и Яковлевым и др. [178, 180] для объяснения наблюдений теплового излучения изолированных нейтронных звезд. В этих работах особое внимание уделялось случаю сильной сверхтекучести протонов и слабой сверхтекучести нейтронов в ядре звезды. Учитывая большую неопределенность моделей сверхтекучести, мы рассмотрим более широкий класс моделей, не предполагая исходно, что спаривание протонов является более сильным, чем спаривание нейтронов. Кроме того, мы уделим внимание нестандартной модели триплетного спаривания нейтронов с анизотропной щелью, исчезающей вдоль оси квантования (сверхтекучесть типа C, см. раздел 1.1.1).

### 1.2.1 Наблюдения остывающих нейтронных звезд

Наблюдательные данные о тепловом излучении одиннадцати изолированных нейтронных звезд среднего возраста ( $10^3 \lesssim t \lesssim 10^6$  лет) собраны в таблице 1.1. Здесь и ниже  $t$  – возраст звезды;  $T_s^\infty = T_s \sqrt{1 - 2GM/c^2R}$  – эффективная температура поверхности звезды, регистрируемая удаленным наблюдателем ( $T_s$  – локальная поверхностная температура;  $G$  – гравитационная постоянная;  $M$  и  $R$  – гравитационная масса и окружный радиус звезды). Данные отличаются от представленных ранее (например, Яковлевым и др. [180]), так как включают результаты новых наблюдений.

Два молодых объекта, RX J0822–4300 и 1E 1207.4–5209 (=J1210–5226), являются радиомолчащими нейтронными звездами в остатках сверхновых. Два из трех самых старых объектов ( $t \gtrsim 5 \times 10^5$  лет), RX J1856.4–3754 и RX J0720.4–3125, также являются радиомолчащими нейтронными звездами. Остальные семь источников – PSR J0205+6449, пульсар в Крабовидной туманности (PSR B0531+21), пульсар в созвездии Парусов (Вела, PSR B0833–45), PSR B1706–44, PSR J0538+2817, Геминга (PSR B0633+1746) и

PSR B1055–52 – наблюдаются как радиопульсары. PSR J0205+6449 и пульсар в Крабовидной туманности находятся в остатках исторических сверхновых; их возраст известен точно. Возраст RX J0822–4300 определен по возрасту остатка родительской сверхновой Puppis A и лежит в пределах  $t = (2 - 5) \times 10^3$  лет (см., например, Арендт и др. [11]) с наиболее вероятным значением  $t = 3.7 \times 10^3$  лет (Уинклер и др. [145]). Возраст 1E 1207.4–5209 считаем равным возрасту остатка родительской сверхновой G296.5+10. Согласно Роджеру и др. [132] этот возраст лежит в интервале от  $\sim 3 \times 10^3$  лет до  $\sim 20 \times 10^3$  лет. Возраст пульсара Вела примем лежащим в пределах от стандартного характеристического возраста пульсара, равного  $1.1 \times 10^4$  лет, до возраста  $2.5 \times 10^4$  лет, полученного Лайном и др. [84] из анализа торможения пульсара с учетом наблюдаемых глитчей. Возраст PSR J0538+2817,  $t = (30 \pm 4)$  лет, оценен Крамером и др. [82] по измеренному собственному движению нейтронной звезды относительно центра остатка родительской сверхновой S147. Возраст RX J1856.4–3754 был оценен Уолтером [146] из кинематических соображений и пересмотрен Уолтером и Латтимером [147]. Следуя последним авторам, примем среднее значение  $t = 5 \times 10^5$  лет и выберем такой интервал ошибок  $t$ , который исключает значение  $t = 9 \times 10^5$ , полученное Уолтером [146]. Характеристический возраст RX J0720.4–3125 оценивался Зане и др. [60] и Капланом и др. [69] по рентгеновским измерениям увеличения периода вращения звезды  $\dot{P}$ . Мы примем среднее значение  $1.3 \times 10^6$  лет с фактором неопределенности 2. Возраст трех радиопульсаров – PSR B1706–44, Геминга и PSR B1055–52 – положен равным характеристическому возрасту с тем же фактором неопределенности 2.

Для двух самых молодых объектов (пульсар в Крабовидной туманности и PSR J0205+6449) получены только верхние пределы  $T_s^\infty$  (Вайскопф и др. [30], Слэйн и др. [135]). Температура поверхности пяти источников – RX J0822–4300, 1E 1207.4–5209, Вела, PSR B1706–44 и PSR J0538+2817 – определена с использованием моделей водородных атмосфер нейтронных звезд (см. ссылки в таблице 1.1). Такие модели дают более реалистические значения радиусов этих нейтронных звезд и лучевых концентраций межзвездного водорода (например, Павлов и др. [116]), чем чернотельная модель

Таблица 1.1: Поверхностные температуры изолированных нейтронных звезд

Источник	$t$ [ $10^3$ лет]	$T_s^\infty$ [ $10^6$ K]	Мо- дель <sup>a)</sup>	Значи- мость	Ссылки
PSR J0205+6449	0.82	<1.1	bb		Слэйн и др. [135]
Crab	1	<2.0	bb	99.7%	Вайскопф и др. [30]
RX J0822–4300	2–5	1.6–1.9	H	90%	Завлин и др. [56]
1E 1207.4–5209	3–20	1.4–1.9	H	90%	Завлин и др. [59]
Vela	11–25	0.65–0.71	H	68%	Павлов и др. [115]
PSR B1706–44	~ 17	$0.82_{-0.34}^{+0.01}$	H	68%	МакГован и др. [105]
PSR J0538+2817	$30 \pm 4$	~ 0.87	H	–	Завлин, Павлов [58]
Geminga	~ 340	~ 0.5	bb	90%	Завлин, Павлов [58]
RX J1856.4–3754	~ 500	<0.65	bb	–	см. текст
PSR B1055–52	~ 540	~ 0.75	bb	–	Павлов, Завлин [117]
RX J0720.4–3125	~ 1300	~ 0.51	H	–	Мотч и др. [111]

<sup>a)</sup> Наблюдения интерпретированы либо в модели водородной атмосферы (H), либо в модели чернотельного излучения (bb).

излучения.

Отметим, что из таблицы 1.1 исключен пульсар PSR B0656+14, который рассматривался ранее (например, Яковлев и др. [180]). Совместный анализ новых рентгеновских и оптических наблюдений источника (с учетом уточненного расстояния до него по измерению параллакса Брискеном и др. [24]) приводит (в модели чернотельного излучения) к слишком малым значениям радиуса нейтронной звезды, либо (в модели водородной атмосферы) к слишком малому расстоянию до звезды (Завлин, Павлов [58]). Это делает интерпретацию теплового излучения звезды слишком ненадежной.

Для пульсаров Геминга и PSR B1055–52 модель излучения черного тела является более самосогласованной. Поэтому примем значения  $T_s^\infty$ , полученные при интерпретации наблюдаемых спектров этой моделью. Для PSR B1055–52 выберем значение  $T_s^\infty$ , приведенное Павловым и Завлиным [117].

Поверхностная температура RX J1856.4–3754 определена недостаточно хорошо. Широкий разброс значений  $T_s^\infty$ , полученных для разных моделей излучения (например, Понс и др. [124], Брайе, Романи [23], Бурвиц и др. [25], Павлов, Завлин [117], Трюмпер и др. [142]), связан с тем, что оптические и рентгеновские наблюдения не описываются единой чернотельной моделью. Это может быть связано, например, с наличием горячих пятен на поверхности звезды. Поэтому зафиксируем лишь верхний предел  $T_s^\infty < 6.5 \times 10^5$  К, который согласуется с величиной  $T_s^\infty$ , полученной как в модели атмосферы, состоящей из “кремниевой золы” (Si-ash, Понс и др. [124]), так и в модели “конденсированного вещества” на поверхности звезды (Бурвиц и др. [25]). Этот предел согласуется также с моделью неоднородного распределения температуры по поверхности звезды, предложенной Павловым и Завлиным [117]. Для последней модели средняя температура поверхности звезды равна  $T_s^\infty = 5 \times 10^5$  К и лежит ниже выбранного верхнего предела.

Наконец, температура поверхности RX J0720.4–3125 взята из работы Мотча и др. [111]. Авторы интерпретировали наблюдаемый спектр, используя модель водородной атмосферы конечной глубины.

Для PSR J0538–4300, PSR B1055–52 и RX J0720–3125 погрешность определения  $T_s^\infty$  авторами (см. таблицу 1.1) не указана. Во всех этих случаях примем ее равной 20%.

### 1.2.2 Модели сверхтекучести нуклонов и нейтринное излучение при куперовском спаривании протонов

Сверхтекучесть нейтронов или протонов можно характеризовать зависимостью критической температуры от плотности вещества  $T_c(\rho)$ . Будем обозначать критическую температуру синглетного спаривания нейтронов в коре как  $T_{\text{cns}}$ , а критические температуры триплетного спаривания нейтронов и синглетного спаривания протонов в ядре как  $T_{\text{cn}}$  и  $T_{\text{cp}}$ , соответственно.

В расчетах остывания нейтронных звезд обычно принимался лишь один тип В триплетной сверхтекучести нейтронов. Исключение составляют работы Шааба и др. [169] и Гусакова, Гнедина [37]. Ниже мы рассмотрим триплетное спаривание нейтронов типов В и С, поскольку влияние сверхтекуче-

сти этих двух типов на теплоемкость и нейтринную светимость нейтронных звезд качественно различно.

Микроскопические теории дают широкий разброс зависимостей  $T_c(\rho)$  (см., например, Ломбардо и Шульце [102]). Максимумы  $T_c(\rho)$  могут принимать значения от  $\lesssim 10^8$  К до  $5 \times 10^{10}$  К. Максимумы  $T_{\text{cn}}(\rho)$  во многих моделях меньше, чем максимумы  $T_{\text{cp}}(\rho)$  и  $T_{\text{cns}}(\rho)$ , вследствие более слабого притяжения между нуклонами в триплетном состоянии.

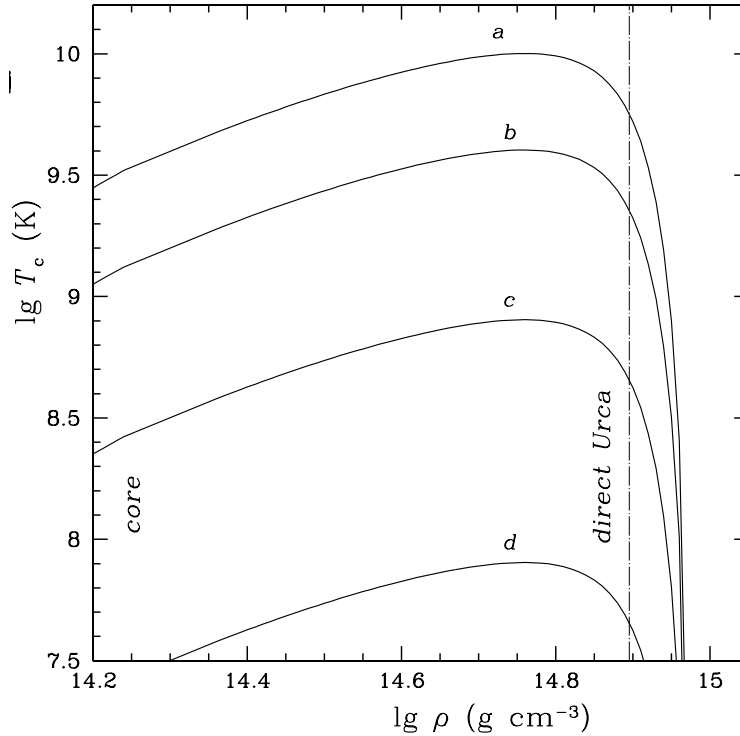


Рис. 1.7: Используемые модельные зависимости критических температур нейтронов и/или протонов в ядре нейтронной звезды от плотности вещества  $\rho$ . Вертикальная штриховая линия указывает порог включения прямого урка-процесса (*direct Urca*).

В главе 1 мы будем использовать четыре феноменологические модельные зависимости  $T_c(\rho)$  сверхтекучести (как для нейтронов, так и для протонов) в ядре нейтронной звезды. На рис. 1.7 эти модели обозначены *a*, *b*, *c* и *d*. Выбранные профили  $T_c(\rho)$  подобны и отличаются только высотой (максимальным значением):  $T_c^{\text{max}} = 10^{10}$ ,  $4.0 \times 10^9$ ,  $8.0 \times 10^8$  и  $8.0 \times 10^7$  К (модели *a*, *b*, *c* и *d*). Сверхтекучесть *a* будем называть *сильной*, *b* – *умеренно сильной*, *c* – *умеренной*, а *d* – *слабой*. Выбранные модели не противоречат результатам теоретических расчетов  $T_c(\rho)$ . Кривые  $T_c(\rho)$  имеют быстро спадающие склоны в области  $\rho > \rho_D$ , где  $\rho_D$  – пороговая плотность, при которой открывается

прямой урка-процесс.

В дальнейшем совместную сверхтекучесть нуклонов в ядрах нейтронных звезд будем обозначать через  $\alpha\beta$ , где  $\alpha$  – одна из моделей ( $a$ ,  $b$ ,  $c$  или  $d$ ) триплетной сверхтекучести нейтронов (типа В или С), а  $\beta$  – одна из моделей ( $a$ ,  $b$ ,  $c$  или  $d$ ) синглетной сверхтекучести протонов.

Следует отметить большую неопределенность в скорости нейтринного энерговыделения  $Q_p$  при куперовском спаривании протонов. В нерелятивистском приближении (Яковлев и др. [177])  $Q_p \propto \zeta_p$ , где  $\zeta_p = c_{Vp}^2$ , а  $c_{Vp} \approx 0.08$  – векторная константа нейтрального тока протонов, которая численно мала и приводит к очень низким значениям  $Q_p$ . Для сравнения, скорость нейтринного энерговыделения  $Q_n$  при триплетном спаривании нейтронов пропорциональна  $\zeta_n = c_{Vn}^2 + 2c_{An}^2 = 4.17$ , где  $c_{Vn} = 1$  и  $c_{An} = -1.26$  – векторная и аксиально-векторная константы нейтрального тока нейтронов. Согласно Каминкеру и др. [63], учет релятивистской поправки, содержащей аксиально-векторную константу нейтрального тока протонов  $c_{Ap} = 1.26$ , может сильно (в 10 – 50 раз) увеличить константу  $\zeta_p$  (и энерговыделение  $Q_p$ ) по сравнению с нерелятивистским значением  $\zeta_p = c_{Vp}^2 = 0.0064$ .

Именно это значение  $\zeta_p$ , усиленное релятивистскими эффектами, использовалось Каминкером и др. [65] ранее в расчетах остывания нейтронных звезд. В то же время, исследуя остывание звезд с критическими температурами протонов  $T_{cp}(\rho)$ , зависящими от плотности эти авторы рассматривали лишь модели сильной протонной сверхтекучести (типа модели  $a$ ). Такая сверхтекучесть возникает на ранних стадиях остывания. Нейтринное излучение при куперовском спаривании протонов на этих стадиях не выдерживает конкуренции с другими нейтринными процессами и не играет особой роли. В более холодной звезде такое нейтринное излучение генерируется лишь в малой части объема и слабо влияет на остывание звезды. Таким образом, в сценариях остывания с сильной протонной сверхтекучестью, рассмотренных ранее, излучение при куперовском спаривании протонов (и точное значение  $\zeta_p$ ) было несущественно.

В данной случае мы включили в рассмотрение модели умеренной сверхтекучести протонов, в которых излучение при куперовском спаривании про-

тонов может заметно влиять на остывание звезды и значение константы  $\zeta_p$  становится важным. Умеренная сверхтекучесть протонов получалась, например, в расчетах Зуо и др. [61] при учете трехчастичных взаимодействий между нуклонами. Как отмечено, например, Яковлевым и др. [177] и Каминкером и др. [63], константа  $\zeta_p$  может определяться не только релятивистскими эффектами, но и эффектами среды (многочастичными эффектами в нуклонной материи), перенормирующими  $\zeta_p$ . Такая перенормировка для данного процесса сложна и до сих пор не проделана. Пример аналогичной перенормировки константы аксиально векторного тока приведен Картером и Пракашем [79]. Для определенности мы проведем расчеты, выбрав перенормированное значение  $\zeta_p = 1$ . Чувствительность расчетов к значению  $\zeta_p$  описана в разд. 1.2.4.

### 1.2.3 Остывание звезд с сильной сверхтекучестью протонов

Сравним данные наблюдений с расчетами кривых остывания нейтронных звезд (зависимостей  $T_s^\infty(t)$ ). Расчеты проводились с помощью программы, описанной Гнединым и др. [35]. В данной главе мы рассмотрим модели нейтронных звезд, ядра которых состоят из нейтронов, протонов и электронов. В ядре звезды используем умеренно жесткое уравнение состояния вещества, предложенное Пракашем и др. [126] (модель I с модулем сжатия симметричной нуклонной материи ядерной плотности  $K = 240$  МэВ). Максимальная масса устойчивой нейтронной звезды для выбранного уравнения состояния равна  $M = 1.977M_\odot$  (при радиусе  $R = 10.754$  км и центральной плотности  $\rho_c = 2.575 \times 10^{15}$  г см<sup>-3</sup>). Данное уравнение состояния разрешает мощный прямой урка-процесс генерации нейтрино (Латтимер и др. [91]) при плотностях  $\rho$  выше пороговой плотности  $\rho_D = 7.851 \times 10^{14}$  г см<sup>-3</sup>, то есть в звездах с массой  $M > M_D = 1.358M_\odot$ . Радиус звезды с пороговой массой  $M_D$  равен  $R = 12.98$  км.

Тепловая эволюция нейтронной звезды состоит из трех стадий: (1) стадия *тепловой релаксации* внутренних слоев звезды ( $t \lesssim 100$  лет), (2) последующая стадия *нейтринного охлаждения* ( $10^2 \lesssim t \lesssim 10^5$  лет) звезды с изотермическим ядром за счет излучения нейтрино из объема звезды и (3)



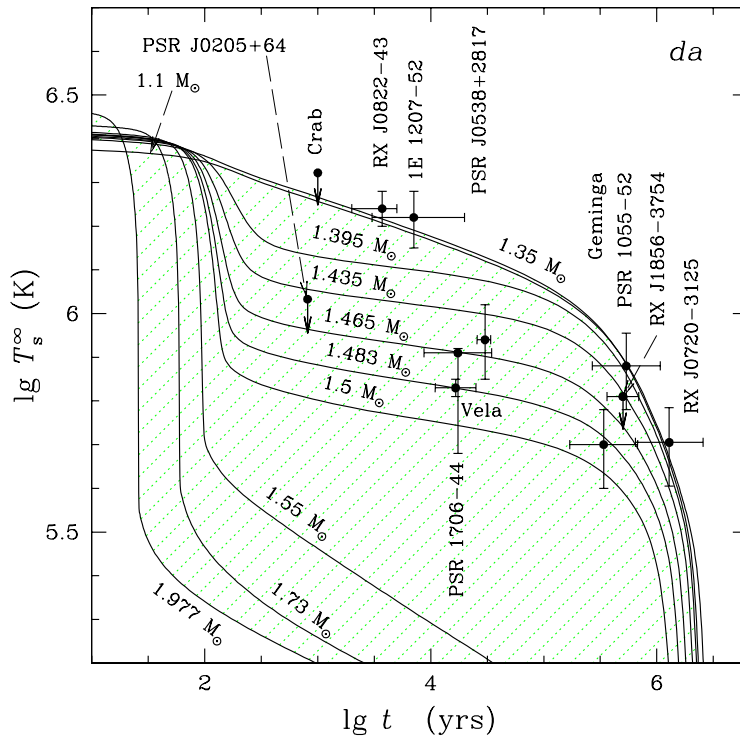


Рис. 1.8: Сравнение наблюдений (таблица 1.1) с кривыми остывания нейтронных звезд с массами от  $1.1$  до  $1.977 M_{\odot}$  (указаны около кривых) при слабой сверхтекучести нейтронов  $d$  и сильной сверхтекучести протонов  $a$ . Заштрихована область, заполняемая кривыми остывания звезд разных масс.

конечная стадия *фотонного охлаждения* ( $t \gtrsim 10^5$  лет) за счет излучения фотонов с поверхности звезды.

Теория остывания несверхтекучих звезд не может объяснить всю совокупность наблюдательных данных (например, Каминкер и др. [65]). Однако теорию можно согласовать с наблюдениями, если учесть возможную сверхтекучесть нуклонов. Согласно Каминкеру и др. [64], для этого достаточно предположить наличие сильной сверхтекучести протонов и слабой сверхтекучести нейтронов в ядрах звезд.

На рис. 1.8 представлены кривые остывания нейтронных звезд разных масс со слабой сверхтекучестью нейтронов  $d$  и сильной сверхтекучестью протонов  $a$ . Сверхтекучесть нейтронов в коре звезды не учитывается. Столь слабая сверхтекучесть нейтронов включается лишь на фотонной стадии остывания. Поэтому тип слабой нейтронной сверхтекучести (В или С) не влияет на остывание звезд среднего возраста. Кривые остывания звезд с массой  $M \gtrsim M_{\odot}$  заполняют заштрихованную область. Все наблюдаемые источники попадают в эту область, то есть объясняются в рамках предложенной

модели сверхтекучести.

Как показано Каминкером и др. [65], сильная сверхтекучесть протонов при слабой сверхтекучести нейтронов (или при нормальных нейтронах) приводит к существованию трех типов остывающих нейтронных звезд.

*Маломассивные* звезды остывают *очень медленно* (медленнее, чем маломассивные несверхтекучие звезды). Кривые остывания таких звезд слабо зависят от их массы, уравнения состояния вещества в их ядрах и от модели сверхтекучести протонов (от конкретного вида зависимости  $T_{\text{cp}}(\rho)$ , при условии, что сверхтекучесть в ядре звезды достаточно сильна,  $T_{\text{cp}}(\rho) \gtrsim 4 \times 10^9$  К). Верхней границей заштрихованной области на рис. 1.8 является кривая остывания звезды с массой  $M = 1.35 M_{\odot}$ ; она почти неотличима от кривой остывания звезды с массой  $M = 1.1 M_{\odot}$  и согласуется с наблюдениями четырех источников, RX J0822–4300, 1E 1207.4–5209, PSR B1055–52 и RX J0720.4–3125, наиболее горячих для своего возраста. Эти источники будем рассматривать как маломассивные нейтронные звезды.

*Массивные* нейтронные звезды остывают *очень быстро* за счет мощного нейтринного излучения, генерируемого прямым урка-процессом во внутреннем ядре звезды. При больших плотностях вещества ( $\rho \gtrsim 10^{15}$  г см<sup>-3</sup>) сверхтекучесть протонов ослабевает (рис. 1.7) и перестает подавлять нейтринное излучение. Кривые остывания таких звезд слабо зависят от масс звезд, уравнения состояния вещества и модели сверхтекучести протонов. Они почти совпадают с кривыми остывания массивных несверхтекучих звезд. Все наблюдаемые изолированные нейтронные звезды значительно горячее, чем звезды этого типа.

Наконец, звезды *средних масс* остывают *умеренно быстро*. Их остывание сильно зависит от массы, уравнения состояния вещества и модели сверхтекучести протонов. Варьируя массу звезд, можно получить семейство кривых остывания, которые заполняют пространство между кривыми остывания маломассивных и массивных звезд. Мы рассматриваем источники PSR J0205+64, Вела, PSR B1706–44, PSR J05438+2817, Геминга и RX J1856.4–3754 как звезды средних масс.

## 1.2.4 Остывание нейтронных звезд при совместной сверхтекучести нуклонов

На рис. 1.9–1.12 представлены кривые остывания нейтронных звезд с разной сверхтекучестью нейтронов  $\alpha$  и протонов  $\beta$  ( $\alpha, \beta = a, b, c$  или  $d$ ). Нейтронная сверхтекучесть имеет тип В. Рассмотрены всевозможные комбинации сверхтекучести нейтронов и протонов. Для каждой комбинации  $\alpha\beta$  приведена верхняя кривая остывания маломассивной звезды ( $M = 1.1 M_{\odot}$ , с центральной плотностью  $\rho_c = 6.23 \times 10^{14}$  г см $^{-3}$ ) и нижняя кривая остывания массивной звезды ( $M = M_{\max}$ ). Нижняя кривая практически не зависит от моделей сверхтекучести  $\alpha\beta$  (см. раздел 1.2.3). Область между верхней и нижней кривыми остывания (аналогично заштрихованной области на рис. 1.8) может быть заполнена кривыми остывания звезд промежуточных масс и является допустимой для данной модели сверхтекучести  $\alpha\beta$ . Как и на рис. 1.8, приведены данные наблюдений. Сравнивая допустимые области  $T_s^{\infty}$  с наблюдательными данными, можно накладывать ограничения на модели сверхтекучести нуклонов.

Каждый рисунок 1.9–1.12 состоит из двух частей. Слева фиксирована сверхтекучесть нейтронов  $\alpha$  и даны кривые остывания для всех четырех моделей сверхтекучести протонов. Справа фиксирована сверхтекучесть протонов  $\beta$  и приведены кривые остывания для четырех моделей сверхтекучести нейтронов. Сравнивая правую и левую части рисунков, можно проследить, как изменится остывание при замене протонной сверхтекучести на нейтронную (и обратно).

### *Фиксированная сверхтекучесть протонов*

Выберем модель сверхтекучести протонов ( $\beta = a, b, c$  или  $d$ ) и рассмотрим зависимость верхних кривых остывания от моделей сверхтекучести нейтронов  $\alpha$  на рис. 1.9–1.12.

Кривые остывания  $b\beta$  проходят ниже кривых  $a\beta$  из-за излучения нейтрино при куперовском спаривании нейтронов. Это излучение существенно подавлено в моделях с сильной сверхтекучестью нейтронов  $a$  (см., например, Яковлев и др. [176, 177], [179]). Все прочие нейтринные реакции с участием

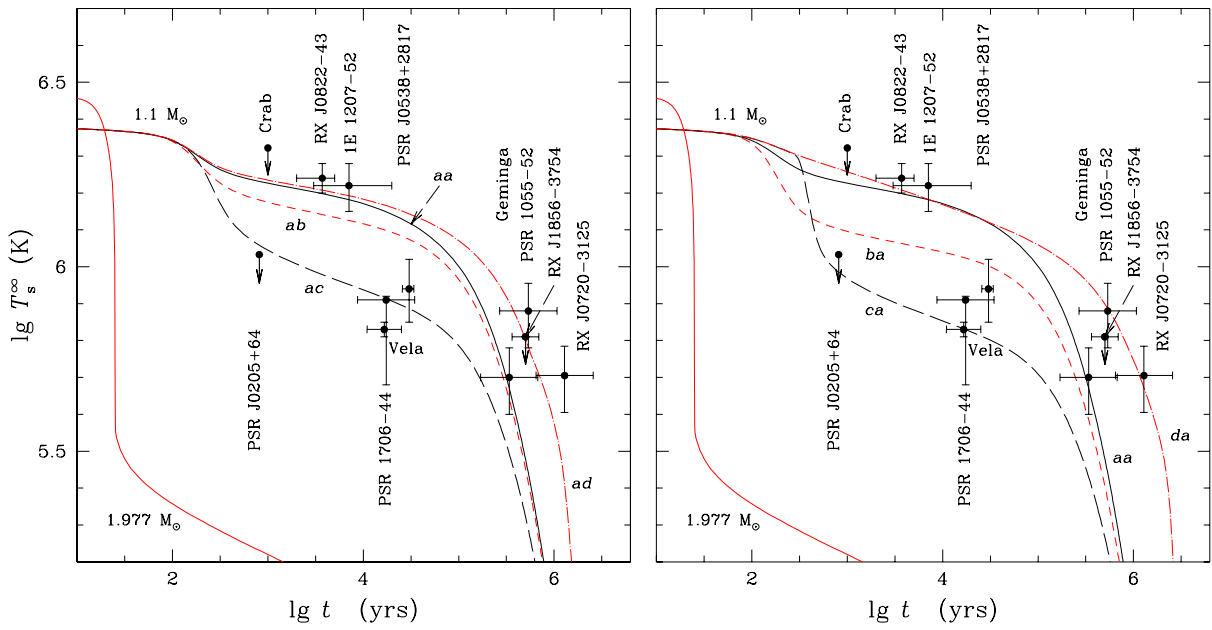


Рис. 1.9: Слева: кривые остывания звезд двух масс:  $M = 1.977M_{\odot}$  и  $M = 1.1M_{\odot}$  с учетом сверхтекучести нейтронов  $a$  и разных моделей сверхтекучести протонов  $a$ ,  $b$ ,  $c$  или  $d$ . Справа: то же, но для модели  $a$  сверхтекучести протонов и разных моделей сверхтекучести нейтронов  $a$ ,  $b$ ,  $c$  или  $d$ . Всюду выбрана сверхтекучесть нейтронов типа В. Теоретические кривые сопоставлены с наблюдениями. Остывание звезды с  $M = 1.977M_{\odot}$  не зависит от модели сверхтекучести.

нейтронов, а также нейтронная теплоемкость, полностью подавлены сверхтекучестью нейтронов  $a$  или  $b$ . Различие кривых остывания  $a\beta$  и  $b\beta$  зависит от модели сверхтекучести протонов  $\beta$ . Так, при переходе от модели  $\beta = a$  к  $\beta = b$  и далее к модели умеренной сверхтекучести протонов  $\beta = c$  вклад нейтринного энерговыделения при куперовском спаривании протонов в нейтринную светимость звезды растет (и становится доминирующим при  $\beta = c$ ). Действительно, нейтринное излучение при куперовском спаривании сильнее всего влияет на остывание при умеренных критических температурах нуклонов  $T_c \sim 2 \times (10^8 - 10^9)$  К (см., например, Яковлев и др. [177], [179]). В результате различие между кривыми остывания  $a\beta$  и  $b\beta$  на рис. 1.9 – 1.11 при переходе от моделей  $\beta = a$  к  $\beta = b$  и  $\beta = c$  последовательно уменьшается. При этом допустимые теоретические области остывания все хуже согласуются с наблюдениями.

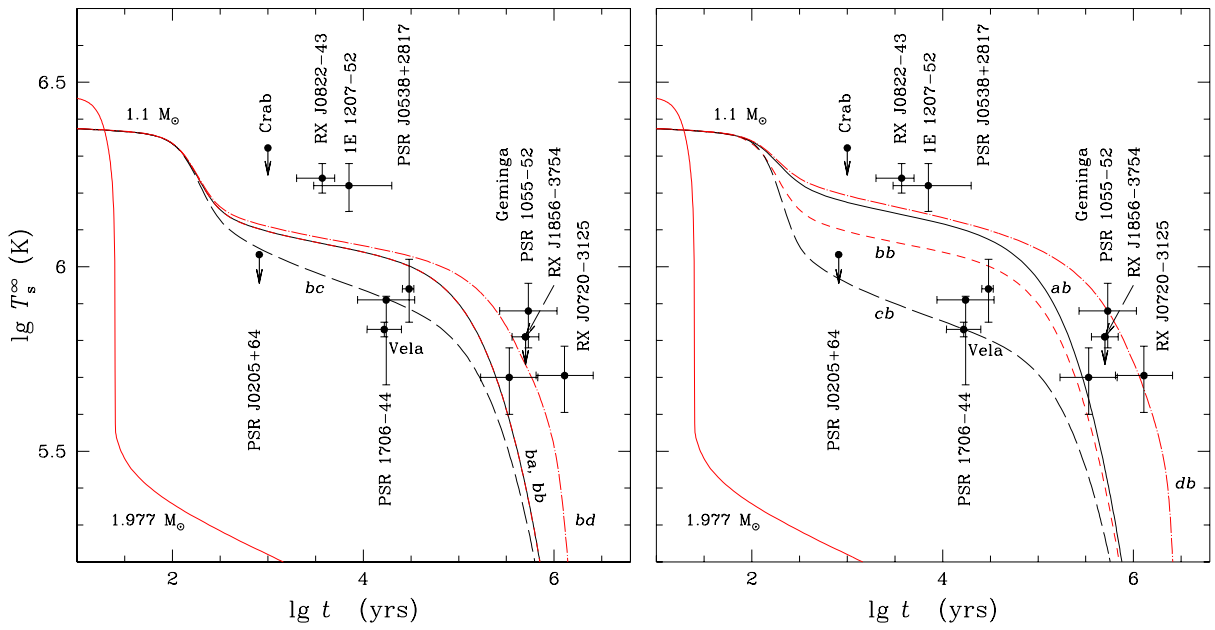


Рис. 1.10: То же, что на рис. 1.9, но для фиксированной модели  $b$  сверхтекучести нейтронов (слева) или протонов (справа).

При слабой сверхтекучести  $\beta = d$  (рис. 1.12) протоны остаются нормальными в течение  $t \lesssim 10^5$  лет, до начала фотонной стадии остывания. При этом основной нейтринный процесс с их участием – тормозное излучение при протон-протонных столкновениях. Вклад этого процесса в нейтринное излучение значительно меньше вклада куперовского спаривания протонов в модели  $c$ , поэтому различие кривых  $ad$  и  $bd$  снова растет. Как и на рис. 1.9 (кривые  $aa$  и  $ba$ ), оно, в основном, определяется более интенсивной генерацией нейтрино при куперовском спаривании нейтронов в модели  $b$ , чем в модели  $a$ . В результате допустимая область температур поверхности звезд при совместной сверхтекучести  $ad$  (как и при сверхтекучести  $da$ , ср. рис. 1.12 с рис. 1.8 и 1.9) согласуется с наблюдениями.

На стадии фотонного охлаждения ( $t \gtrsim 10^5$  лет) кривые  $a\beta$  и  $b\beta$  сближаются. В этом случае влияние сверхтекучести нейтронов  $a$  или  $b$  на остывание звезды проявляется, главным образом, в сильном подавлении теплоемкости нейтронов. В результате теплоемкость звезды определяется суммарной теплоемкостью протонов (также подавленной сверхтекучестью  $\beta$ ) и электронов.

Для моделей сверхтекучести  $c\beta$  нейтринное излучение при куперовском спаривании нейтронов становится особенно эффективным. Как следствие,

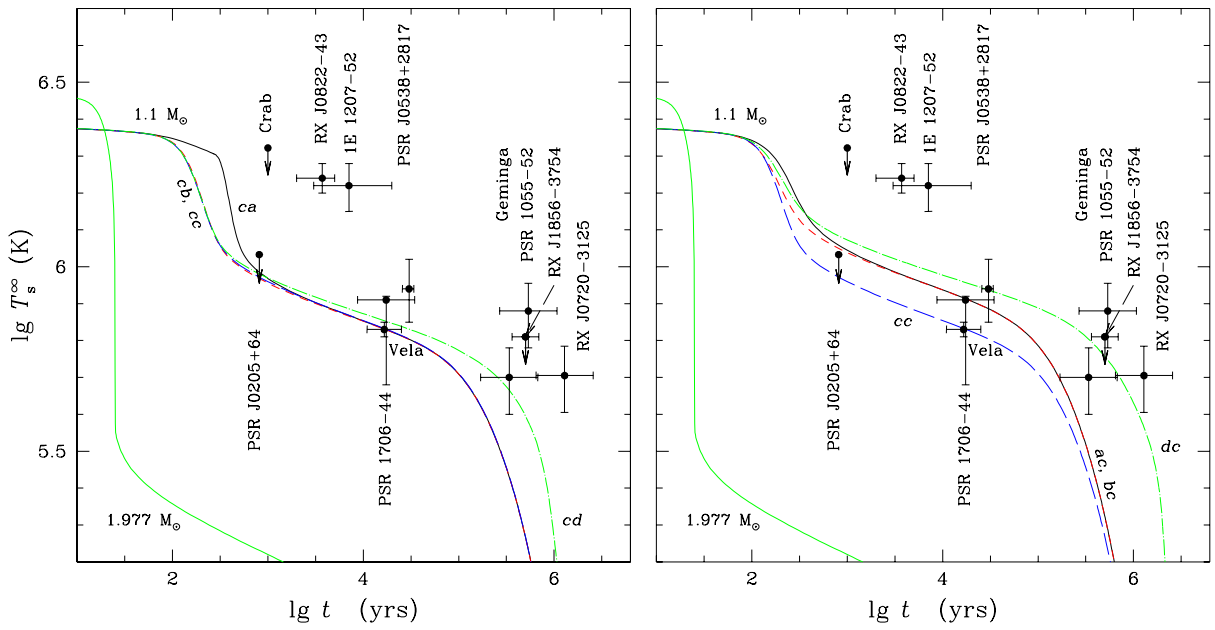


Рис. 1.11: То же, что на рис. 1.9, но для модели с сверхтекучести нейтронов (слева) или протонов (справа).

кривые остывания  $c\beta$  на рис. 1.9–1.12 проходят заметно ниже кривых  $a\beta$  и  $b\beta$  и не слишком различаются между собой. В частности, все кривые  $c\beta$  описывают резкое ускорение остывания при  $t \sim 300$  лет, связанное со включением нейтринного излучения при спаривании нейтронов. Можно видеть, что допустимые температуры поверхности звезд, полученные для моделей сверхтекучести  $c\beta$ , расположены заметно ниже большинства наблюдательных точек.

Для модели слабой нейтронной сверхтекучести  $d$  кривые  $d\beta$  почти совпадают с кривыми остывания, полученными для нормальных нейтронов. Некоторые различия возникают лишь на фотонной стадии остывания ( $t \gtrsim 10^5$  лет) из-за частичного подавления нейтронной теплоемкости. На нейтринной же стадии остывания сверхтекучесть нейтронов типа  $d$  еще не наступила. Поэтому все кривые остывания  $d\beta$  расположены выше кривых  $c\beta$ . При  $t \gtrsim 10^5 - 10^6$  лет кривые остывания  $d\beta$  при любых  $\beta$  проходят выше и кривых  $a\beta$ , и кривых  $b\beta$  из-за сильного подавления теплоемкости нейтронов сверхтекучестью  $a$  и  $b$ . Наконец, кривая остывания для модели совместной сверхтекучести  $dd$  близка к стандартной кривой остывания несверхтекучих нейтронных звезд малых масс ( $M < M_D$ ). Эта кривая остывания не согласо-

ется с наблюдениями многих нейтронных звезд (как наиболее горячих, так и наиболее холодных для своего возраста).

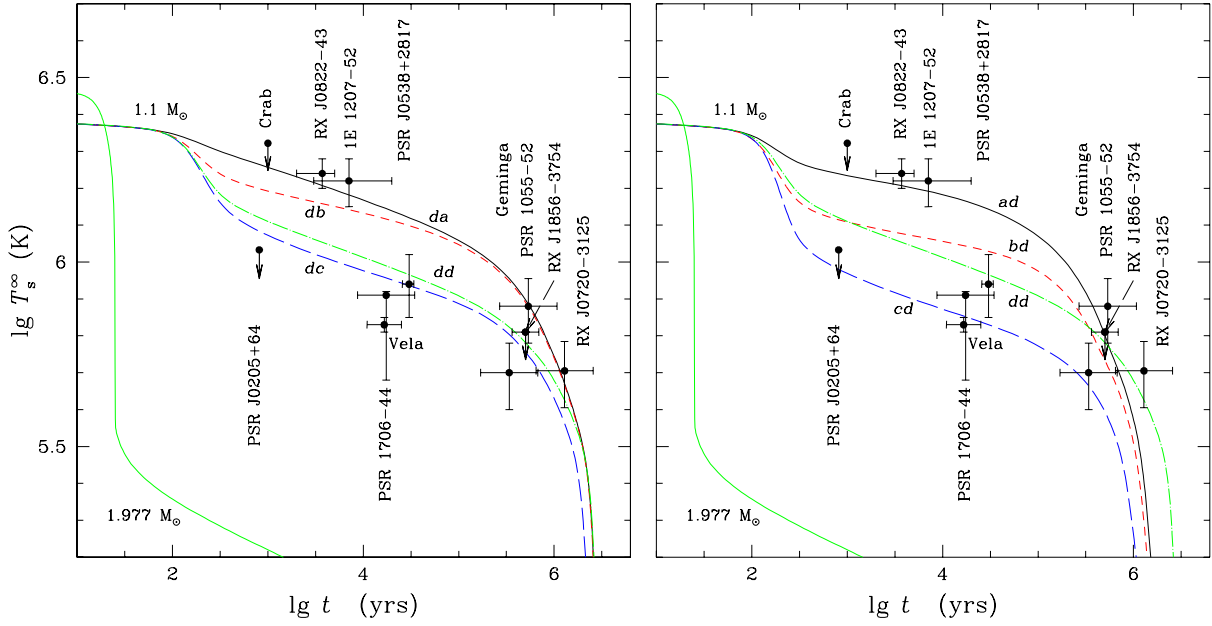


Рис. 1.12: То же, что на рис. 1.9, но для модели  $d$  сверхтекучести нейтронов (слева) и протонов (справа).

### Фиксированная сверхтекучесть нейтронов

Выберем модель сверхтекучести нейтронов ( $\alpha = a, b, c$  или  $d$ ) и рассмотрим зависимость верхних кривых остывания от моделей  $\beta$  сверхтекучести протонов. Сравнивая левые и правые части рис. 1.9–1.12, можно отметить качественное подобие кривых остывания маломассивных звезд ( $M = 1.1 M_\odot$ ) при инверсии сверхтекучестей нейтронов и протонов (то есть для моделей  $\alpha\beta$  и  $\beta\alpha$ ).

Количественные различия между кривыми остывания  $\alpha\beta$  и  $\beta\alpha$  связаны с разной концентрацией нейтронов и протонов в ядрах нейтронных звезд и с различием типов спаривания нейтронов (триpletное) и протонов (синглетное). Это приводит к несколько асимметричному влиянию нейтронов и протонов на нейтринную светимость и теплоемкость (см., например, Яковлев и др. [176]). Так, при температурах  $T$  незначительно ниже  $T_c$  нейтринное энерговыделение при спаривании нейтронов оказывается примерно на

порядок выше, чем при спаривании протонов (даже для выбранного значения константы  $\zeta_p = 1$ ; разд. 1.2.2). Поэтому кривые остывания  $b$  ( $\beta = a, d$ ) и  $c$  ( $\beta = a, b, d$ ) (левые части рис. 1.10 и 1.11) расположены ниже, чем “инверсные” кривые  $(\alpha = a, d) b$  и  $(\alpha = a, b, d) c$  (правые части тех же рисунков). С другой стороны, кривая  $ad$  (левая часть рис. 1.9) на фотонной стадии остывания ( $t \gtrsim 10^5$  лет) идет ниже, чем кривая  $da$  (правая часть того же рисунка). Это связано с более сильным подавлением теплоемкости ядра нейтронной звезды сверхтекучестью нейтронов  $\alpha = a$ , чем сверхтекучестью протонов  $\beta = a$ . В остальных случаях инверсия нейтронной и протонной сверхтекучестей ведет к качественно схожим (примерно симметричным) кривым остывания на рис. 1.9–1.12. Для массивных нейтронных звезд ( $M > M_D$ ) такая симметрия была обнаружена Левенфиш и др. [96] в упрощенных расчетах остывания звезд с критическими температурами нейтронов и протонов, постоянными по ядру звезды.

Сопоставляя верхние кривые остывания с наблюдениями на рис. 1.9 – 1.12, можно видеть, что существуют всего две модели совместной сверхтекучести нуклонов, которые не противоречат всей совокупности наблюдательных данных. Это обсуждавшаяся в разделе 1.2.3 модель  $da$  и “инверсная” к ней модель  $ad$  (рис. 1.9 и 1.12). Иными словами, одна сверхтекучесть (нейтронов или протонов) должна быть слабой, а другая сильной. Остальные модели не в состоянии одновременно объяснить данные наблюдений, прежде всего, четырех нейтронных звезд (RX J0822–4300, 1E 1207.4–5209, PSR B1055–52 и RX J0720.4–3125), наиболее горячих для своего возраста.

Варьируя модели сверхтекучести нуклонов, можно получить ограничения на величину критических температур нуклонов, допускающих согласие теории с наблюдениями. В общем случае должны совместно выполняться следующие условия: либо  $T_{\text{cn}}^{\text{max}} \lesssim 2 \times 10^8$  К и  $T_{\text{cp}}^{\text{max}} \gtrsim 4 \times 10^9$  К, либо  $T_{\text{cn}}^{\text{max}} \gtrsim 5 \times 10^9$  К и  $T_{\text{cp}}^{\text{max}} \lesssim 2 \times 10^8$  К.

Модели умеренной сверхтекучести нейтронов и/или протонов в ядрах нейтронных звезд с максимальными значениями:  $T_{\text{cn}}^{\text{max}}$  и/или  $T_{\text{cp}}^{\text{max}}$  в диапазоне  $\sim (2 \times 10^8 - 4 \times 10^9)$  К не согласуются с наблюдениями нейтронных звезд, наиболее горячих для своего возраста. Можно показать, что этот вы-



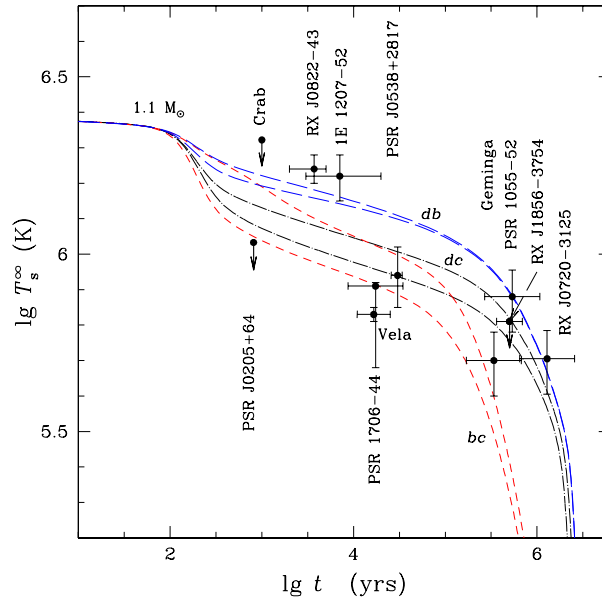


Рис. 1.13: Кривые остывания маломассивной звезды ( $M = 1.1 M_{\odot}$ ) для трех моделей сверхтекучести нуклонов ( $db$  – длинные штрихи,  $dc$  – штрихпунктир,  $bc$  – короткие штрихи) в сравнении с наблюдениями. Нижняя кривая для каждой модели сверхтекучести рассчитана с перенормированной константой  $\zeta_p = 1$  скорости нейтринного энерговыделения при куперовском спаривании протонов, а верхняя – с перенормированной.

вод справедлив в значительно более широком классе моделей сверхтекучести нуклонов, чем принятые в данной работе (см. раздел 1.2.2). Тем не менее, существует достаточно узкая область параметров сверхтекучести нуклонов, при которых комбинация сильной сверхтекучести нуклонов одного сорта и умеренной сверхтекучести нуклонов другого может быть согласована с наблюдениями (см. главу 2).

*О константе нейтринного энерговыделения при куперовском спаривании протонов*

Обсудим кратко чувствительность кривых остывания к значениям константы  $\zeta_p$  в выражении для скорости нейтринного энерговыделения при куперовском спаривании протонов. Напомним, что значение  $\zeta_p$ , учитывающее многочастичные эффекты, известно плохо (раздел 1.2.2). В приведенных

расчетах мы использовали (перенормированное) значение  $\zeta_p = 1$ .

Для примера на рис. 1.13 изображены кривые остывания маломассивной нейтронной звезды для трех моделей сверхтекучести нейтронов и протонов ( $db$ ,  $dc$  и  $bc$ ). Как показано выше, нейтринное излучение при куперовском спаривании особенно важно именно в маломассивных звездах. Как и всюду в разд. 1.2.4, рассмотрена сверхтекучесть нейтронов типа В. Нижняя из двух кривых для каждой модели сверхтекучести рассчитана с перенормированной константой  $\zeta_p = 1$ , а верхняя – с неперенормированной (но полученной с учетом релятивистских эффектов; см. Каминкер и др. [63]).

В модели  $db$  протонная сверхтекучесть  $b$  является умеренно сильной и возникает на раннем этапе остывания. Нейтринное излучение при спаривании протонов играет относительно слабую роль, и точное значение константы  $\zeta_p$  слабо влияет на остывание.

В модели  $dc$ , и особенно  $bc$ , умеренное спаривание протонов  $\beta = c$  приводит к мощному нейтринному излучению и заметно ускоряет остывание. В этих случаях кривые остывания наиболее чувствительны к значениям  $\zeta_p$ . Однако, как видно из рис. 1.13, рассмотренные изменения  $\zeta_p$  не могут привести к согласию кривых остывания  $dc$  и  $bc$  с наблюдениями и, следовательно, не влияют на выводы данной работы. Мы считаем перенормированное значение  $\zeta_p = 1$  более реалистичным, чем неперенормированное. Имеющаяся неопределенность в значениях  $\zeta_p$  вносит неопределенность в теорию остывания. В частности, для неперенормированной величины  $\zeta_p$  отмеченная выше приближенная симметрия кривых остывания относительно инверсии моделей сверхтекучести нуклонов  $\alpha\beta$  и  $\beta\alpha$  будет выражена гораздо слабее, чем для перенормированной (см. также Яковлев и др. [176]). Возможно, что выбор значения  $\zeta_p$  в дальнейшем окажется важным для согласования теории с наблюдениями.

### 1.2.5 Два типа триплетной сверхтекучести нейтронов

Сравним влияние двух типов триплетной сверхтекучести нейтронов (В и С, раздел 1.2.2) на остывание нейтронных звезд. Очевидно, что существенных различий следует ожидать в случае достаточно сильной нейтронной сверхте-



$T_{\text{ср}}$  и  $T_{\text{сн}}$ , постоянных по ядру звезды. Расчеты показывают, что во многих случаях вид кривых остывания не меняется, если вместо реальных профилей критических температур  $T_{\text{ср}}(\rho)$  и  $T_{\text{сн}}(\rho)$  использовать эффективные постоянные критические температуры, близкие к значениям  $T_{\text{ср}}(\rho_c)$  и  $T_{\text{сн}}(\rho_c)$  в центре звезды ( $\rho = \rho_c$ ). Такое приближение справедливо, когда  $T_c(\rho)$  достаточно плавно меняется вблизи центра звезды (например, в звездах малой массы).

Гусаков и Гнедин [37] показали, что нейтронная сверхтекучесть типа С ускоряет остывание звезды (по сравнению со сверхтекучестью типа В). Это связано со степенным характером подавления нейтринных процессов сверхтекучестью типа С (в отличие от экспоненциального подавления в случае В; см., например, Яковлев и др. [176], Гусаков [36]). Наши расчеты (рис. 1.14) показывают, что сделанный вывод остается справедливым и в более реалистичном подходе, учитывающем изменение критических температур  $T_{\text{сн}}(\rho)$  и  $T_{\text{ср}}(\rho)$  по ядру звезды.

Кривые остывания маломассивных звезд и звезд средних масс на правой части рис. 1.14 располагаются существенно ниже кривых остывания звезд тех же масс на левой части рисунка. С другой стороны, кривые остывания массивных звезд ( $M \gtrsim 1.55 M_{\odot}$ ) на обеих частях рисунка практически совпадают по вполне понятной причине: в центральных областях этих звезд критические температуры малы ( $T_{\text{сн}} \lesssim 10^8$  К, см. рис. 1.7), так что сверхтекучесть вообще перестает влиять на остывание.

Таким образом, согласно рис. 1.14, сильная сверхтекучесть нейтронов типа С не согласуется с наблюдениями нейтронных звезд, наиболее горячих для своего возраста. Эта сверхтекучесть еще недостаточно сильна, чтобы полностью подавить модифицированный урка-процесс в маломассивной звезде и, тем самым, сделать звезду более горячей. Разумеется, теорию можно согласовать с наблюдениями, выбрав модель более сильной сверхтекучести типа С. Расчеты показывают, что для этого требуется зависимость  $T_{\text{сн}}(\rho)$  с максимумом при  $T_{\text{сн}}^{\text{max}} \sim 10^{11}$  К. Однако столь сильная триплетная сверхтекучесть представляется нереальной. Теоретические аргументы против того, что сверхтекучесть типа С вообще возникает в нейтронных звездах, приве-

дены Ходелем и др. [157, 158].

### 1.3 Основные результаты первой главы

В разделе 1.1.2 рассчитаны факторы подавления нейтринного излучения для нейтронной и протонной ветвей модифицированного урка-процесса при совместной сверхтекучести протонов и нейтронов. При этом рассматривалось синглетное спаривание протонов А и триплетное спаривание нейтронов А, В или С. Факторы подавления аппроксимированы удобными аналитическими формулами, представленными в Приложении 1.

В разделе 1.1.3 изучено подавление нейтринного энерговыделения при нейтрон-нейтронном и нейтрон-протонном рассеянии для сверхтекучести протонов А и сверхтекучести нейтронов С. Построенные приближенные факторы подавления аппроксимированы аналитическими формулами. Решен вопрос о том, какой нейтринный механизм доминирует в ядрах нейтронных звезд в зависимости от критических температур нейтронов и протонов  $T_{cn}$  и  $T_{cp}$ , а также от типа нейтронной сверхтекучести (В или С).

Полученные результаты вместе с результатами, имевшимися в литературе (см., например, Яковлев и др. [179]), позволяют рассчитать скорость нейтринного энерговыделения в ядрах нейтронных звезд для случаев протонной сверхтекучести А и нейтронной сверхтекучести А, В или С.

В разделе 1.2 проанализировано остывание нейтронных звезд, в ядрах которых имеется триплетная сверхтекучесть нейтронов и синглетная сверхтекучесть протонов. Резюмируем полученные результаты:

(а) Имеет место качественная симметрия кривых остывания нейтронных звезд относительно инверсии моделей сверхтекучести нейтронов и протонов. Для маломассивных звезд ( $M < M_D$ ) такая симметрия в значительной степени связана со значением безразмерной константы  $\zeta_p \sim 1$  в выражении для скорости нейтринного энерговыделения при куперовском спаривании протонов (раздел 1.2.2). При значениях  $\zeta_p \ll 1$ , полученных без проведения перенормировки  $\zeta_p$ , учитывающей многочастичные эффекты, симметрия выражена значительно слабее, чем при значениях  $\zeta_p \sim 1$ , которые можно ожидать в результате перенормировки.

(b) Два типа моделей сверхтекучести нейтронов и протонов согласуются с наблюдениями теплового излучения изолированных нейтронных звезд. Во-первых, это модели сильной сверхтекучести протонов (типа А) и слабой (или полностью отсутствующей) сверхтекучести нейтронов (типа В или С) с максимальными по ядру звезды значениями критических температур:  $T_{\text{cp}}^{\text{max}} \gtrsim 4 \times 10^9$  К и  $T_{\text{cn}}^{\text{max}} \lesssim 2 \times 10^8$  К. Во-вторых, это модели сильной сверхтекучести нейтронов (типа В) и слабой (или полностью отсутствующей) сверхтекучести протонов с  $T_{\text{cn}}^{\text{max}} \gtrsim 5 \times 10^9$  К и  $T_{\text{cp}}^{\text{max}} \lesssim 2 \times 10^8$  К. Модели первого типа представляются более реалистичными. В частности, отметим недавнюю работу Швенка и Фримана [172], предсказывающую ослабление триплетного спаривания нейтронов эффектами среды.

(c) Модели умеренной сверхтекучести нейтронов (типа В или С) и/или умеренной сверхтекучести протонов (типа А) с максимальными критическими температурами  $T_{\text{cn}}^{\text{max}}$  и  $T_{\text{cp}}^{\text{max}}$  в интервале от  $\sim 2 \times 10^8$  до  $\sim 4 \times 10^9$  К не согласуются с наблюдениями, прежде всего, молодых и наиболее горячих нейтронных звезд RX J0822–4300 и 1E 1207.4–5209. Однако, как будет показано в главе 2 (см. также [40, 185]), существует достаточно узкая область параметров модельной сверхтекучести нейтронов и протонов, при которой согласие теории остывания с наблюдениями становится возможным и для умеренной сверхтекучести нейтронов ( $T_{\text{cn}}^{\text{max}} \sim 6 \times 10^8$  К).

(d) Сильная триплетная сверхтекучесть нейтронов типа С может заметно ускорять остывание нейтронных звезд среднего возраста ( $10^3 \lesssim t \lesssim 10^5$  лет) по сравнению со сверхтекучестью типа В для тех же зависимостей  $T_{\text{cn}}(\rho)$ . При сильной нейтронной сверхтекучести типа С ( $T_{\text{cn}}^{\text{max}} \gtrsim 5 \times 10^9$  К) и слабой протонной сверхтекучести ( $T_{\text{cp}}^{\text{max}} \lesssim 2 \times 10^8$  К) теория уже не может быть согласована с наблюдениями источников RX J0822–4300, 1E 1207.4–5209, PSR B1055–52 и RX J0720.4–3125, наиболее горячих для своего возраста. Для любых моделей сильной или умеренной нейтронной сверхтекучести переход от сверхтекучести типа В к сверхтекучести типа С только усиливает различия теории и наблюдений.

Проведенный анализ является упрощенным, поскольку мы рассмотрели только ядра нейтронных звезд, состоящие из нейтронов, протонов и элек-

тронов (пренебрегая возможностью существования гиперонов, пионного или каонного конденсатов, или кварковой материи). Более того, мы выбрали только одно уравнение состояния вещества ядер нейтронных звезд (см. раздел 1.2.3) и подобные друг другу профили критических температур  $T_c(\rho)$  нейтронов и протонов в ядре звезды. Вариации уравнения состояния (при том же составе вещества) приводят к смещению порога включения мощного прямого урка-процесса (к изменению величин  $\rho_D$  и  $M_D$ ). Вариации профилей  $T_c(\rho)$  (с сохранением их общего вида) при высоких  $T_c^{\max} \gtrsim 2 \times 10^9$  К ведут к сдвигам характерных значений  $\rho$ , при которых сверхтекучесть ослабевает и перестает подавлять мощное нейтринное излучение. И то и другое приводит к сдвигам граничных значений масс, разделяющих три типа остывающих нейтронных звезд (см. Каминкер и др. [65]), но не меняет основных выводов данной работы. Существенно, что простейшая модель нейтронных звезд с сильной сверхтекучестью протонов (даже без сверхтекучести нейтронов) способна объяснить имеющиеся наблюдения.

Следует добавить, что остывание нейтронных звезд зависит также от (синглетной) сверхтекучести нейтронов во внутренней коре звезды, от магнитного поля в самых внешних слоях звезды, а также от наличия или отсутствия поверхностного слоя легких элементов (см., например, Потехин и др. [125]). Однако, как правило, эти факторы оказывают более слабое влияние на остывание, чем рассмотренная нами сверхтекучесть нуклонов в ядрах нейтронных звезд. Мы не учитывали их, ограничиваясь рассмотрением только эффектов сверхтекучести в ядрах звезд. Наша программа остывания легко позволяет их учесть, и это может быть необходимо для интерпретации отдельных источников, прежде всего объектов, наиболее горячих для своего возраста (например, Потехин и др. [125]). Остывание нейтронных звезд может также зависеть от механизмов подогрева звезд, связанного, например, с вязкой диссипацией энергии дифференциального вращения (см., например, Паж [119, 120]). Подчеркнем, что такие механизмы подогрева модельно зависимы. В то же время, имеющиеся наблюдения можно объяснить и без их привлечения.

## ГЛАВА 2

### КУПЕРОВСКОЕ СПАРИВАНИЕ НУКЛОНОВ КАК МЕХАНИЗМ УСКОРЕННОГО ОСТЫВАНИЯ НЕЙТРОННЫХ ЗВЕЗД

В главе 1, равно как и в большинстве работ посвященных теории остывания нейтронных звезд, для объяснения наблюдений наиболее холодных изолированных нейтронных звезд привлекался прямой урка-процесс или его аналог в экзотических фазах вещества (пионный/каонный конденсат, кварковое вещество).

В этой главе предложен новый сценарий остывания нейтронных звезд. Мы используем простое уравнение состояния для вещества сверхъядерной плотности (Душен и Хэнсел [54]), состоящего из нуклонов, электронов и мюонов. Это уравнение состояния запрещает прямой урка-процесс для всех стабильных конфигураций нейтронных звезд. Мы покажем, что ускоренное остывание, требующееся для объяснения наиболее холодных звезд, может быть обусловлено нейтринным энерговыделением при куперовском спаривании нейтронов. Подчеркнем, что предлагаемый сценарий возможен только при определенной зависимости критической температуры нейтронов от плотности.

#### 2.1 Сценарий остывания

В соответствии с принятым уравнением состояния Душена и Хэнсела [54], ядра нейтронных звезд (области с плотностью  $\rho > 1.3 \times 10^{14}$  г см<sup>-3</sup>) состоят из нейтронов с примесью протонов, электронов и мюонов, причем мюоны появляются лишь при плотностях  $\rho > 2.03 \times 10^{14}$  г см<sup>-3</sup>. Максимальная гравитационная масса стабильной нейтронной звезды равна  $M = M_{\max} = 2.05 M_{\odot}$ , центральная плотность такой звезды  $\rho_c = 2.9 \times 10^{15}$  г см<sup>-3</sup>, а ее окружный



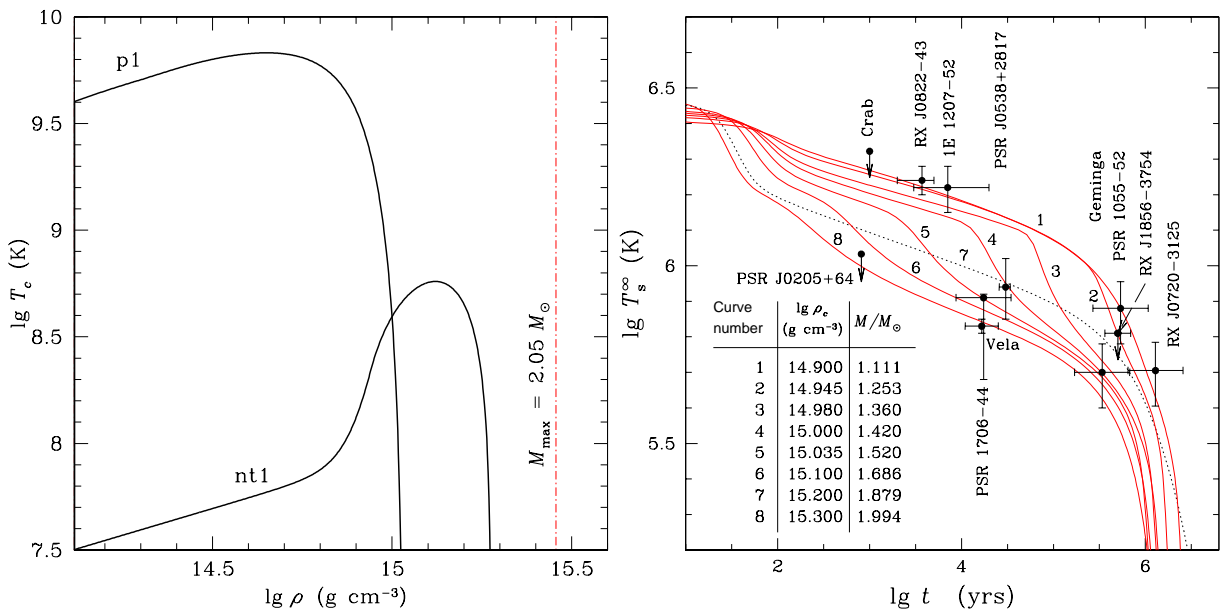


Рис. 2.1: Слева: Зависимость критической температуры протонов (модель p1) и нейтронов (модель nt1) от плотности в ядре нейтронной звезды; вертикальная штрих-пунктирная линия обозначает центральную плотность устойчивой звезды максимальной массы. Справа: Данные наблюдений (таблица 1) и теоретические кривые остывания восьми нейтронных звезд (1–8) с различными массами. Сплошные линии относятся к нейтронным звездам со сверхтекучестью протонов 1p и нейтронов 1nt (см. левую часть рисунка). Точечная линия 7 показана для несверхтекучей звезды. Во вставке приводится таблица масс и центральных плотностей для звезд 1–8.

радиус  $R = 9.99$  км. Центральные плотности и массы для восьми моделей нейтронных звезд (с массами от  $1.111 M_\odot$  до  $1.994 M_\odot$ ) даны в таблице на правой части рис. 2.1.

Физическая модель остывающей нейтронной звезды, в рамках которой проводилось данное исследование, стандартна. Эффекты, связанные с появлением мюонов учитывались аналогично тому, как это было сделано Бейгером и др. [18]. Мы не предполагали наличия аккреционных оболочек из легких элементов на поверхности нейтронных звезд (раздел 2.3).

Новым элементом данной работы является уравнение состояния Душена и Хэнсела [54]. Мы выбрали именно это уравнение состояния, поскольку для него мощный прямой урка-процесс (Латтимер и др. [91]) закрыт для всех стабильных конфигураций нейтронных звезд ( $M \leq M_{\max}$ ). В этом случае

кривая остывания  $T_s^\infty(t)$  любой несверхтекучей нейтронной звезды с массой  $M_\odot \lesssim M \leq M_{\max}$  будет практически совпадать с точечной кривой на правой части рис. 2.1. На нейтринной стадии остывания форма этой “универсальной” кривой будет определяться нейтринным излучением за счет модифицированного урка-процесса. Универсальная кривая остывания практически нечувствительна к уравнению состояния в ядрах нейтронных звезд (Паж и Эпплгейт [118]) до тех пор, пока прямой урка-процесс запрещен. Как было показано многими авторами (см., например, Яковлев и Петик [183] и ссылки там), и как следует из рис. 2.1, такая модель остывания безусловно не может объяснить наблюдательные данные. Например, эта модель предсказывает температуры  $T_s^\infty$  ниже, чем у источника PSR B1055–52, но выше чем у пульсара в созвездии Парусов. Для того, чтобы объяснить наблюдения, необходимо учесть сверхтекучесть нуклонов в ядрах нейтронных звезд.

Для расчетов мы выбрали одну модель сильной сверхтекучести протонов (с максимумом  $T_{\text{cp}}(\rho)$  порядка  $T_{\text{cp}}^{\max} \approx 7 \times 10^9$  К) и несколько моделей умеренной сверхтекучести нейтронов ( $T_{\text{cn}}^{\max} \sim 6 \times 10^8$  К) в ядре звезды. Хотя эти модели являются феноменологическими, они не противоречат результатам микроскопических теорий (см., например, Ломбардо и Шульце [102], Швенк и Фриман [172]). Модели протонной сверхтекучести p1 и нейтронной сверхтекучести nt1 приведены на левой части рис. 2.1.

Сильная протонная сверхтекучесть требуется для того, чтобы замедлить остывание маломассивных звезд с массой  $M \lesssim 1.1 M_\odot$  (то есть с центральными плотностями  $\rho_c \lesssim 8 \times 10^{14}$  г см<sup>-3</sup>). Такая модель сверхтекучести была использована Каминкером и др. [64]. В ядрах маломассивных звезд имеем  $T_c(\rho) \gtrsim 3 \times 10^9$  К. Протонная сверхтекучесть появляется уже на ранних стадиях остывания нейтронных звезд ( $t \lesssim 1$  года) и подавляет модифицированный урка-процесс, а также процессы нейтринного излучения при протон-протонных и протон-нейтронных столкновениях. Излучение нейтрино при куперовском спаривании протонов включается слишком рано и становится неэффективным в нейтронных звездах среднего возраста, температуры которых мы сравниваем с теоретическими моделями остывания. Напротив, выбранная сверхтекучесть нейтронов слишком слаба в маломассивных звезд-

дах (см. левую часть рис. 2.1), чтобы проявиться на нейтринной стадии остывания. Такая сверхтекучесть не подавляет процесс нейтринного излучения при нейтрон-нейтронных столкновениях, который становится основным нейтринным механизмом остывания нейтронных звезд. Этот процесс значительно слабее, чем модифицированный урка-процесс (наиболее мощный для несверхтекучих звезд). Как следствие, кривые остывания маломассивных звезд проходят существенно выше универсальной кривой остывания, построенной для несверхтекучих звезд. Анализ Каминкера и др. [65] показывает, что эти кривые остывания также сливаются в одну универсальную кривую (кривая 1 на рис. 2.1), практически не зависящую от уравнения состояния в ядре звезды и от конкретного вида зависимости  $T_{\text{ср}}(\rho)$ . Универсальная кривая 1 позволяет интерпретировать наиболее горячие для своего возраста источники RX J0822–4300, 1E 1207.4–5209, PSR B1055–52 и RX J0720.4–3125 как маломассивные остывающие нейтронные звезды.

Обратимся теперь к наблюдениям наиболее холодных для своего возраста нейтронных звезд (прежде всего, это пульсар в созвездии Парусов, PSR J0205+6449 и Геминга). Обычно эти объекты интерпретируют как довольно массивные нейтронные звезды, в ядрах которых разрешен прямой урка-процесс (или аналогичный процесс в пионном/каонном конденсате или в кварковой материи), приводящий к ускоренному остыванию. Мы покажем, что на самом деле наиболее холодные объекты могут быть объяснены без привлечения этих механизмов остывания, если определенным образом выбрать модель умеренной сверхтекучести нейтронов при плотностях  $\rho \gtrsim 8 \times 10^{14} \text{ г см}^{-3}$ . Рассмотрим наиболее массивную нейтронную звезду ( $1.994 M_{\odot}$ , кривая 8) на рис. 2.1. Центральная плотность такой звезды выше плотности, при которой исчезает сверхтекучесть нейтронов (см. левую часть рис. 2.1). Когда внутренняя температура звезды становится меньше, чем максимальная критическая температура нейтронной сверхтекучести, включается процесс нейтринного излучения при куперовском спаривании нейтронов. Энерговыделение этого мощного процесса может быть на два порядка больше энерговыделения прямого урка-процесса в несверхтекучих нейтронных звездах (см. раздел 2.2). Таким образом, мы приходим к *ускоренному*

остыванию без привлечения прямого урка-процесса или его аналогов в “экзотическом” веществе. Ускорение остывания не слишком сильное (например, прямой урка-процесс в нуклонном ядре звезды мощнее, чем этот процесс, на 4–5 порядков). Тем не менее, даже такого ускоренного остывания достаточно для объяснения наиболее холодных нейтронных звезд (в частности, пульсара в созвездии Парусов, PSR J0205+6449 и Геминги). Очевидно, все нейтронные звезды с центральной плотностью  $\rho_c \gtrsim 2 \times 10^{15}$  г см<sup>-3</sup> (в нашей модели) остывают так же, как и звезда с массой  $1.994 M_\odot$  на рис. 2.1.

Таким образом, мы приходим к трем различным классам остывающих нейтронных звезд (аналогичным тем, что рассмотрены в работе Каминкера и др. [65] и в главе 1 для случая ускоренного остывания за счет прямого урка-процесса). Первый класс содержит маломассивные, медленно остывающие звезды (кривая 1 на правой части рис. 2.1). В другом классе содержатся массивные, ускоренно остывающие звезды (кривая 8). Наконец, еще один класс составляют нейтронные звезды средних масс, показывающих промежуточное (между медленным и ускоренным) остывание. Кривые остывания таких звезд заполняют пространство между верхней универсальной кривой для маломассивных звезд и нижней универсальной кривой для массивных звезд. В класс нейтронных звезд средних масс попадают источники PSR B1706–44, PSR J0538+2817 и RX J1856.4–3754.

## 2.2 Куперовское спаривание нейтронов как причина ускоренного остывания

В этом разделе мы дадим простое объяснение результатов компьютерного моделирования ускоренного остывания нейтронных звезд, обусловленного куперовским спариванием нейтронов. Рассмотрим выражение для нейтринного энерговыделения  $Q_{\text{CP}}$  этого процесса (см., например, формулу (236) работы Яковлева и др. [179]):

$$Q_{\text{CP}}(\rho, T) = q(\rho, T) F(\tau), \quad (2.1)$$

где

$$q(\rho, T) \approx 1.17 \times 10^{21} \left( \frac{m_N^*}{m_N} \right) \left( \frac{p_F}{m_N c} \right) \times T_9^7 \mathcal{N}_\nu a_N \text{ erg cm}^{-3} \text{ s}^{-1}, \quad (2.2)$$

$T \equiv T_9 \times 10^9 \text{ K}$  – внутренняя температура звезды;  $m_N$  – масса свободного нуклона (N=p или n);  $m_N^*$  – эффективная масса нуклона в плотном веществе;  $p_F$  – нуклонный ферми-импульс;  $a_N$  – безразмерная константа, которая является комбинацией квадратов векторной и аксиально-векторной констант слабого взаимодействия;  $\mathcal{N}_\nu = 3$  – число типов нейтрино и  $F(\tau)$  – функция параметра  $\tau = T/T_c$ . Константа  $a_N$  зависит от сорта нуклонов и типа спаривания, в то время как функция  $F(\tau)$  зависит только от типа спаривания. Для триплетного спаривания нейтронов  $a_n = 4.17$ . Это значение в принципе может быть перенормировано многочастичными эффектами (например, перенормировка аксиально-векторной константы была рассмотрена Картером и Пракашом [79]). Однако, теоретические кривые остывания не слишком чувствительны к изменениям  $a_n$ , поэтому мы используем перенормированное значение этой константы. Аналитическая аппроксимация функции  $F(\tau)$  приведена, например, в работе Яковлева и др. [179]. Сразу после появления сверхтекучести (то есть когда  $T$  опускается чуть ниже, чем  $T_c$ ) имеем:  $F(\tau) \approx 4.71(1 - \tau)$ . При  $\tau \ll 1$  получаем  $F(\tau) \approx 1.27 \tau^{-6} \exp(-2.376/\tau)$ . Таким образом, энерговыделение  $Q_{\text{CP}}(\rho, T)$  экспоненциально подавлено при  $T \ll T_c$ .

Для качественного анализа в этом разделе мы будем использовать простейшую зависимость нейтронной критической температуры от расстояния  $r$  до центра звезды:

$$T_{\text{cn}}(r) = T_{\text{cm}} \left\{ 1 - \frac{(r - r_m)^2}{(\Delta r_m)^2} \right\} \quad (2.3)$$

при  $|r - r_m| < \Delta r_m$  (с максимумом  $T_{\text{cm}} = T_{\text{cn}}^{\text{max}}$  при  $r = r_m$ ) и  $T_{\text{cn}} = 0$  при  $|r - r_m| \geq \Delta r_m$ .

Пренебрегая для простоты эффектами общей теории относительности и считая ядро звезды изотермичным, получаем для нейтринной светимости

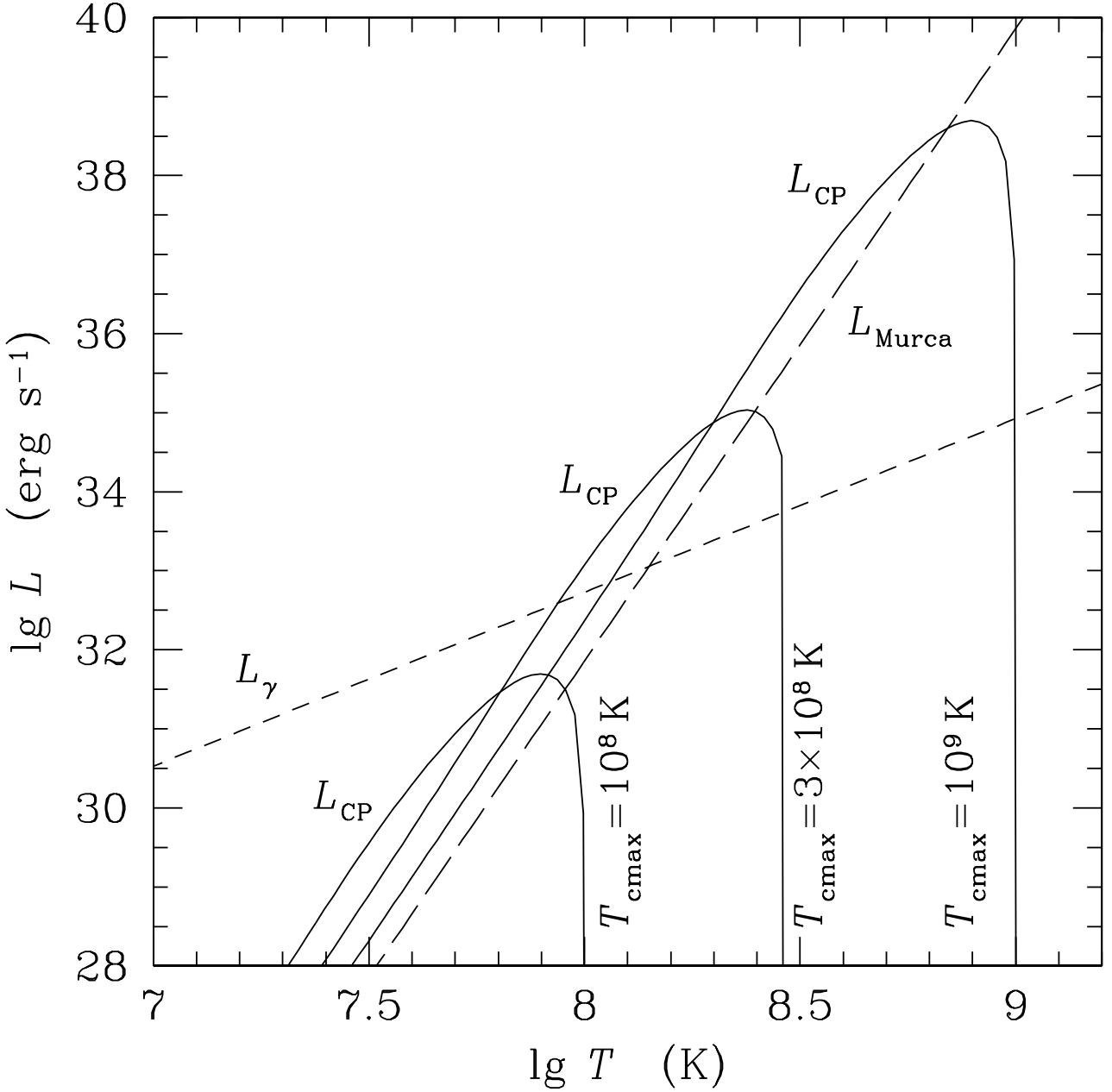


Рис. 2.2: Нейтринные светимости нейтронной звезды, обусловленные модифицированным урка-процессом ( $L_{\text{Murca}}$ ) и процессом куперовского спаривания ( $L_{\text{CP}}$ ), а также фотонная светимость  $L_\gamma$  как функции внутренней температуры  $T$  для трех моделей триплетной нейтронной сверхтекучести  $T_{\text{сн}}^{\text{max}} = 10^8$ ,  $3 \times 10^8$  и  $10^9$  К.

$L_{\text{CP}}$  за счет куперовского спаривания нейтронов при  $T < T_{\text{cm}}$ :

$$L_{\text{CP}} = 4\pi \int_{r_1}^{r_2} r^2 Q_{\text{CP}} dr. \quad (2.4)$$

Здесь  $r_1$  и  $r_2$  определяют слой в ядре звезды, в котором нейтроны сверхтекучи ( $T < T_{\text{cn}}$ ) и рассматриваемый процесс разрешен. Для определенности предположим, что для любых  $T$  этот слой полностью содержится в ядре нейтронной звезды.

Множитель  $F(\tau)$  в формуле (2.1) для энерговыделения  $Q_{\text{CP}}$  представляет собой более быстро изменяющуюся функцию  $r$ , чем  $q(\rho, T)$ . Поэтому во всех подынтегральных функциях кроме функции  $F(\tau)$  можно положить  $r = r_m$  и  $q(\rho, T) = q(\rho_m, T)$  (где  $\rho_m = \rho(r_m)$ ). Простая замена переменных приводит теперь к следующему выражению для  $L_{\text{CP}}$ :

$$L_{\text{CP}} = 8\pi r_m^2 \Delta r_m q(\rho_m, T) \tau_m \ell(\tau_m), \quad (2.5)$$

$$\ell(\tau) = \frac{1}{2} \int_{\tau}^1 \frac{d\tau' F(\tau')}{\tau'^{3/2} \sqrt{\tau' - \tau}}, \quad (2.6)$$

где  $\tau_m = T/T_{\text{cm}}$ . Интегрирование в формуле (2.5) может быть проведено численно; аппроксимационная формула для  $\ell(\tau_m)$  имеет вид:

$$\begin{aligned} \ell(\tau) = (1 - \tau)^{3/2} & \left[ 3.844(1 - \tau) + 3.142 \tau^2 \right. \\ & \left. + 13.99\tau(1 - \tau) + \frac{25.4 \tau^{2.5} (1 - \tau)^2}{((\tau - 0.2493)^2 + 0.03694)^{0.7}} \right]. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Очевидно, что светимость  $L_{\text{CP}}$  равна нулю в горячей звезде, для которой  $T > T_{\text{cm}}$  (нет нейтронной сверхтекучести). Отличная от нуля светимость возникает при  $T < T_{\text{cm}}$  и растет почти линейно с уменьшением температуры до  $T \sim 0.8 T_{\text{cm}}$ ; она достигает максимума при  $T = 0.792 T_{\text{cm}}$  ( $\tau \ell(\tau) = 0.792 \ell(0.792) = 0.481$ ) и затем начинает спадать. На стадии роста и около максимума основной вклад в светимость  $L_{\text{CP}}$  дают сферические слои вещества, расположенные вблизи максимума критических температур (на расстояниях  $r \approx r_m$  от центра звезды). Это создает всплеск нейтринного излучения, связанный с куперовским спариванием нейтронов.

Для типичных значений параметров, максимальное значение  $L_{\text{CP}}$  может быть на один-два порядка больше, чем нейтринная светимость  $L_{\text{Murca}}$

несверхтекучей звезды (с запрещенным прямым урка-процессом). Это утверждение проиллюстрировано на рис. 2.2 для упрощенной аналитической модели остывающей нейтронной звезды, описанной Яковлевым и Хэнселом [182] – в этом разделе нет нужды использовать более строгие модели. При построении графиков на рисунке использована модель нейтронной звезды с массой  $M = 1.16 M_{\odot}$ , радиусом  $R = 12$  км, центральной плотностью  $\rho_c = 8 \times 10^{14}$  г см<sup>-3</sup> и  $r_m = \Delta r_m = 5$  км. Три модели сверхтекучести  $T_{\text{cm}}(r)$  подобны друг другу и отличаются значениями максимальной критической температуры  $T_{\text{cm}} = 10^8$ ,  $3 \times 10^8$ , and  $10^9$  К. Сплошными линиями показана нейтринная светимость  $L_{\text{CP}}$ , рассчитанная при помощи формул (2.4)–(2.7) для трех моделей нейтронной сверхтекучести. Поскольку  $L_{\text{Murca}} \propto T^8$ , а  $L_{\text{CP}}^{\text{max}} \propto T^7$ , то светимость, обусловленная нейтринным излучением при куперовском спаривании нейтронов, больше при слабой сверхтекучести (то есть при низких критических температурах  $T_{\text{cm}}$ ). Однако, при  $T_{\text{cm}} \lesssim 2 \times 10^8$  К эта светимость становится меньше, чем фотонная светимость звезды (рис. 2.2). Поэтому процесс излучения нейтрино при куперовском спаривании нейтронов перестает быть важным для остывания нейтронных звезд. Нужно отметить, что для разумных значений параметров светимость  $L_{\text{CP}}$  много меньше, чем нейтринная светимость за счет прямого урка-процесса в несверхтекучих звездах (если прямой урка-процесс открыт).

Уменьшающаяся (с уменьшением  $T$ ) часть функции  $L_{\text{CP}}(T)$  еще более интересна. При  $\tau \rightarrow 0$  мы имеем  $\ell(\tau) \approx 3.84$ , поэтому из формулы (2.5) следует соотношение:

$$L_{\text{CP}} \propto \Delta r_m T^8 / T_{\text{cm}}, \quad (2.8)$$

которое начинает выполняться с хорошей точностью уже при  $T \lesssim 0.6 T_{\text{cm}}$ . При малых температурах ( $\tau \rightarrow 0$ ) вклад в светимость  $L_{\text{CP}}(T)$  в основном вносят узкие области значений координаты  $r$  вблизи точек  $r = r_1$  и  $r = r_2$ , в которых внутренняя температура звезды  $T$  совпадает с  $T_c(r)$ . Толщина этих областей пропорциональна  $T$ , что объясняет степенной закон  $T^8$  (вместо экспоненциального закона уменьшения нейтринного энерговыделения  $Q_{\text{CP}}(\rho, T)$  сверхтекучего вещества). Таким образом, мы приходим к важному выводу: при  $T \lesssim 0.6 T_{\text{cm}}$  нейтринная светимость, обусловленная ку-



перовским спариванием нейтронов, имеет *ту же температурную зависимость*, что и для всех “медленных” процессов нейтринного энерговыделения (модифицированный урка-процесс и процессы излучения нейтрино при нуклон-нуклонном рассеянии) в несверхтекучих ядрах звезд. Другими словами, сверхтекучесть подавляет основные нейтринные процессы (действующие в несверхтекучих звездах), но при этом инициирует процесс излучения нейтрино при куперовском спаривании нейтронов, который “имитирует” остывание несверхтекучей звезды. Нейтринные потери, обусловленные этим механизмом, могут быть больше, чем в несверхтекучих звездах и обеспечивать ускоренное остывание. Это важное свойство присуще реалистичным моделям остывающих нейтронных звезд с зависящими от плотности критическими температурами  $T_c(\rho)$  (и отсутствует в моделях с постоянными по ядру критическими температурами  $T_c$ ). В частности, одинаковая температурная зависимость светимости  $L_{\text{CP}}(T)$  и светимости неподавленного модифицированного урка-процесса  $L_{\text{Murca}}(T)$  приводит к тому, что если в какой то момент времени  $L_{\text{CP}} > L_{\text{Murca}}$ , то такое же неравенство будет выполняться и во все последующие моменты времени (что наглядно видно на рис. 2.2).

Добавим, что при  $T \ll T_{\text{cm}}$  формулу для  $L_{\text{CP}}$  можно получить без использования конкретного вида зависимости  $T_c(r)$ , задаваемого выражением (2.3). Для этого достаточно заметить, что основной вклад в светимость  $L_{\text{CP}}$  в формуле (2.4) вносят узкие области  $r \approx r_1$  и  $r \approx r_2$ , в которых  $T_c(r) \approx T$ . В каждой такой области градиент  $D = dT_c(r)/dr$  можно считать постоянным. Таким образом, получаем:

$$L_{\text{CP}} = 8\pi \left[ r_1^2 H_1 q(\rho_1, T) + r_2^2 H_2 q(\rho_2, T) \right] \ell(0), \quad (2.9)$$

где  $H_1 = T/|D_1|$  и  $H_2 = T/|D_2|$  – характеристическая ширина этих областей,  $\rho_1 = \rho(r_1)$ ,  $\rho_2 = \rho(r_2)$ , и  $\ell(0) = 3.84$ . Строго говоря,  $r_1$ ,  $r_2$ ,  $\rho_1$ ,  $\rho_2$ ,  $D_1$  и  $D_2$  зависят слегка от  $T$ , но эта зависимость может рассматриваться как параметрическая. Легко убедиться в том, что если  $T_c(r)$  дается формулой (2.3) при  $T \ll T_{\text{cm}}$  и  $\Delta r \ll r_m$ , то новое выражение для  $L_{\text{CP}}$  совпадает с формулой (2.5). В общем случае формула (2.5) хорошо описывает светимость  $L_{\text{CP}}$  при  $0.6 T_{\text{cm}} \lesssim T < T_{\text{cm}}$  (то есть там, где функция  $T_c(r)$  может быть с

хорошей точностью аппроксимирована параболой), в то время как формула (2.9) является лучшим приближением при низких  $T$ . Обе эти формулы можно включить в упрощенные аналитические модели остывания (такие как упрощенная аналитическая модель Яковлева и Хэнсела [182]), полезные для качественного понимания тепловой эволюции нейтронных звезд без привлечения громоздких численных кодов.

Приведенный выше анализ справедлив при условии, что функция  $T_c(\rho)$  обращается в ноль внутри нейтронной звезды. В противном случае существует минимальное значение  $T_c^{\min}$  функции  $T_c(\rho)$ , такое, что светимость  $L_{\text{CP}}$  будет экспоненциально подавлена при  $T \ll T_c^{\min}$ .

### 2.3 Обсуждение сценария остывания

После подробного изучения процесса излучения нейтрино при куперовском спаривании нейтронов, вернемся к рассмотрению сценария остывания, описанного в разделе 2.1. Как мы уже отмечали, этот сценарий не очень чувствителен к конкретной модели протонной сверхтекучести (которая требуется для увеличения поверхностной температуры маломассивных звезд среднего возраста и, таким образом, для объяснения наиболее горячих для своего возраста источников). Единственное серьезное ограничение на протонное спаривание заключается в том, что критическая температура  $T_{\text{cp}}(\rho)$  должна быть высокой ( $\gtrsim 3 \times 10^9$  К) в ядрах маломассивных нейтронных звезд.

В отличие от протонной сверхтекучести, существуют *очень строгие* ограничения на возможный вид зависимости  $T_{\text{cn}}(\rho)$  в ядре звезды. Это утверждение проиллюстрировано на рис. 2.3. На левой части рисунка показаны критические температуры протонной сверхтекучести (модель p1) и пяти моделей (nt1–nt5) нейтронной сверхтекучести (модели p1 и nt1 уже были использованы в разделе 2.1). На правой части рисунка показаны кривые остывания маломассивной ( $1.111 M_{\odot}$ ) и массивной ( $1.994 M_{\odot}$ ) звезд. Любая кривая рассчитана для модели p1 протонной сверхтекучести и одной из моделей нейтронной сверхтекучести из левой части рис. 2.3. Любого источник, попадающий в промежуток между верхней и нижней кривой одного сорта (кривые остывания маломассивных звезд практически сливаются в верх-

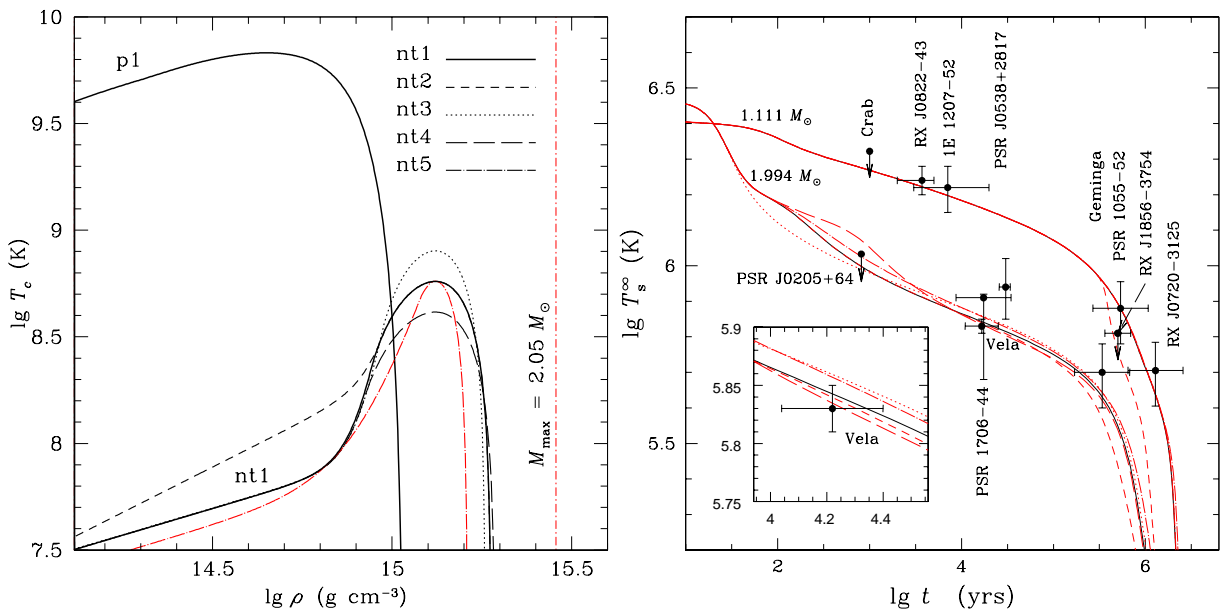


Рис. 2.3: Слева: Одна модель протонной сверхтекучести p1 и пять моделей nt1–nt5 нейтронной сверхтекучести в ядре нейтронной звезды. Справа: Кривые остывания маломассивных ( $1.111 M_{\odot}$ ) и массивных ( $1.994 M_{\odot}$ ) звезд со сверхтекучестью протонов p1 и одной из сверхтекучестей нейтронов, изображенной на левой части рисунка, сравниваются с наблюдениями. Остывание маломассивных звезд нечувствительно к используемым моделям сверхтекучести нейтронов (за исключением модели nt2 при  $t > 3 \times 10^5$  лет). На вставке более детально показано сравнение кривых остывания массивных звезд с наблюдениями пульсара в созвездии Парусов (Vela).

ную сплошную линию на рис. 2.3.), может быть объяснен в рамках одной определенной модели нейтронной сверхтекучести. Перечислим ограничения, накладываемые на сверхтекучесть нейтронов.

(1) Сверхтекучесть нейтронов в маломассивных нейтронных звездах должна быть слабой. В нашем случае (для уравнения состояния Душена и Хэнсела [54]) это означает, что  $T_{\text{cn}}(\rho) \lesssim 2 \times 10^8$  К при  $\rho \lesssim 8 \times 10^{14}$  г см $^{-3}$ .

При таком предположении сверхтекучесть нейтронов не влияет на остывание маломассивных звезд ( $M \lesssim 1.1 M_{\odot}$ ) по крайней мере, на нейтринной стадии и не препятствует нашей интерпретации наиболее горячих для своего возраста источников (прежде всего, источников RX J0822–4300 и PSR B1055–52). Соответственно, все пять кривых остывания маломассивных

звезд (построенные для сверхтекучестей nt1–nt5) сливаются в одну верхнюю (сплошную) кривую остывания на рис. 2.3. Единственным исключением является модель nt2 с наиболее высокими (среди моделей nt1–nt5) значениями критической температуры  $T_{\text{cn}}(\rho)$  при малых плотностях. В маломассивных звездах эта сверхтекучесть появляется при  $t \gtrsim 3 \times 10^5$  лет. Процесс излучения нейтрино при куперовском спаривании нейтронов и подавленная теплоемкость нейтронов заметно ускоряют остывание на таких временах (верхняя кривая из коротких штрихов).

(2) Сверхтекучесть нейтронов должна быть умеренной при  $\rho \gtrsim 10^{15}$  г см<sup>-3</sup>, с максимумом, приходящимся на плотность  $T_{\text{cn}}^{\text{max}} \sim 6 \times 10^8$  К (модель nt1 на рис. 2.3, сплошная линия). В этом случае сверхтекучесть нейтронов своевременно возникает в ядре массивной звезды, обеспечивая ускоренное остывание. Зависимость  $T_{\text{cn}}(\rho)$  подобрана так, чтобы объяснить наблюдения наиболее холодных для своего возраста нейтронных звезд (прежде всего, пульсара в созвездии Парусов и пульсара PSR J0205+6449). На временах  $t \gtrsim (1 - 10) \times 10^3$  лет массивные звезды выходят на асимптотический режим остывания, при котором выполняется соотношение (2.8). Если бы температура  $T_{\text{cn}}^{\text{max}}$  была слегка выше, чем  $6 \times 10^8$  К (модель nt3,  $T_{\text{cn}}^{\text{max}} = 8 \times 10^8$  К, точечная кривая), то процесс излучения нейтрино при куперовском спаривании нейтронов, начав работать в более молодых звездах, стал бы менее эффективным при  $t \sim 10^4$  лет, что затруднило бы интерпретацию наблюдений пульсара в созвездии Парусов. Такой характер остывания легко объясняется при помощи соотношения (2.8). Если бы температура  $T_{\text{cn}}^{\text{max}}$  была слегка ниже чем  $6 \times 10^8$  К (модель nt4,  $T_{\text{cn}}^{\text{max}} = 4 \times 10^8$  К, кривая из длинных штрихов), то процесс излучения нейтрино при куперовском спаривании нейтронов “включился” бы слишком поздно, делая невозможным объяснение наблюдений источника PSR J0205+6449.

Сверхтекучесть нейтронов также чувствительна к ширине пика зависимости  $T_{\text{cn}}(\rho)$ . Например, сохраняя прежним значение температуры  $6 \times 10^8$  К в максимуме пика, но делая пик уже, мы уменьшаем нейтринную светимость при куперовском спаривании нейтронов, что приводит к повышению поверхностной температуры массивной звезды и, как следствие, затрудня-

ет интерпретацию пульсара в созвездии Парусов (опять, в согласии с соотношением (2.8)). Однако, кривые остывания малочувствительны к точному местоположению максимума зависимости  $T_{\text{сн}}(\rho)$ . Мы можем слегка сдвинуть максимум в область более высоких или более низких плотностей  $\rho$  (удерживая пик внутри ядра массивной звезды), но эти сдвиги не поменяют кривые остывания массивных нейтронных звезд (на рис. 2.3 такие модели не показаны). Однако, сдвиг максимума к плотностям  $\rho \lesssim 8 \times 10^{14} \text{ г см}^{-3}$  приведет к ускоренному остыванию маломассивных нейтронных звезд. В этом случае кривые остывания маломассивных звезд станут проходить близко к кривым остывания массивных звезд, при этом интерпретация наиболее горячих для своего возраста нейтронных звезд станет невозможной (см. пункт (1)).

Из сказанного следует, что кривая остывания массивной нейтронной звезды, приведенная на рис. 2.3 для модели nt1 нейтронной сверхтекучести nt1, близка к *предельно низкой кривой остывания*, которая только может быть получена в рамках предлагаемого сценария. Наблюдения холодных нейтронных звезд PSR J0205+6449 и пульсара в созвездии Парусов предоставляют прекрасную возможность для проверки этого сценария. В случае, если эти пульсары (благодаря будущим наблюдениям) окажутся заметно холоднее, мы не сможем объяснить наблюдения в рамках данного сценария. Заметим, что верхний предел на поверхностную температуру источника PSR J0205+6449 был получен в предположении чернотельного спектра поверхностного излучения (Слэйн и др. [135]). Если этот пульсар обладает водородной атмосферой, то верхний предел на температуру  $T_s^\infty$  может быть примерно в два раза ниже, чем в предположении чернотельного излучения. Тогда объяснение этого источника в рамках предложенного сценария будет невозможно.

Хотя мы использовали только одно уравнение состояния плотного вещества Душена и Хэнсела [54], мы бы получили схожие результаты для других уравнений состояния, которые запрещают прямой урка-процесс (а также аналогичные процессы быстрого остывания) в ядрах нейтронных звезд. Использование другого уравнения состояния приведет к приписыванию несколько других масс уже рассмотренным источникам (рис. 2.1); аналогичная про-

блема обсуждалась Каминкером и др. [65].

В заключение следует отметить работу Паж и др. [121], в которой независимо был предложен аналогичный сценарий остывания. В этой статье авторы детально исследовали ускоренное остывание за счет излучения нейтрино при куперовском спаривании нейтронов. При этом они рассмотрели стандартный состав ядер нейтронных звезд (нейтроны с примесью протонов, электронов и мюонов) с запрещенным прямым урка-процессом. Хотя основная идея, предлагаемая авторами – ускорить остывание благодаря излучению нейтрино при куперовском спаривании нейтронов – такая же, как и в нашей работе, она реализована по-другому. В частности, Паж и др. [121] использовали ряд моделей сверхтекучести, полученных из микроскопических теорий. Используемые ими основные модели нейтронной сверхтекучести в ядре звезды (например, модель (а) на их рис. 9) имеют слишком высокие критические температуры в вершине пика,  $T_{\text{сн}}^{\text{max}} \gtrsim 10^9$  К, а также слишком высокие температуры в области плотностей перед пиком, чтобы объяснить наблюдения источника PSR J0205+6449 и пульсара в созвездии Вела и получить существенную зависимость кривых остывания от массы звезды  $M$ . Напротив, наша модель нейтронной сверхтекучести является феноменологической, но подобрав функцию  $T_{\text{сн}}(\rho)$ , мы получили ярко выраженную зависимость остывания от  $M$ . Это позволило нам объяснить все наблюдательные данные при помощи одной модели нуклонной сверхтекучести.

## 2.4 Дальнейшая разработка сценария остывания

Рассмотренный в разделе 2.1 сценарий остывания является несколько упрощенным. Хотя уже в рамках этого сценария можно объяснить данные наблюдений (см. таблицу 1.1), в нем не учитывается все многообразие факторов, влияющих на остывание нейтронных звезд.

В частности, на остывание нейтронных звезд могут влиять синглетная сверхтекучесть свободных нейтронов во внутренней коре, оболочки из легких (аккреционных) элементов или поверхностные магнитные поля. (Эффекты, связанные с магнитными полями обычно слабее, поэтому мы их не обсуждаем. Более подробно о влиянии магнитных полей см., например, По-

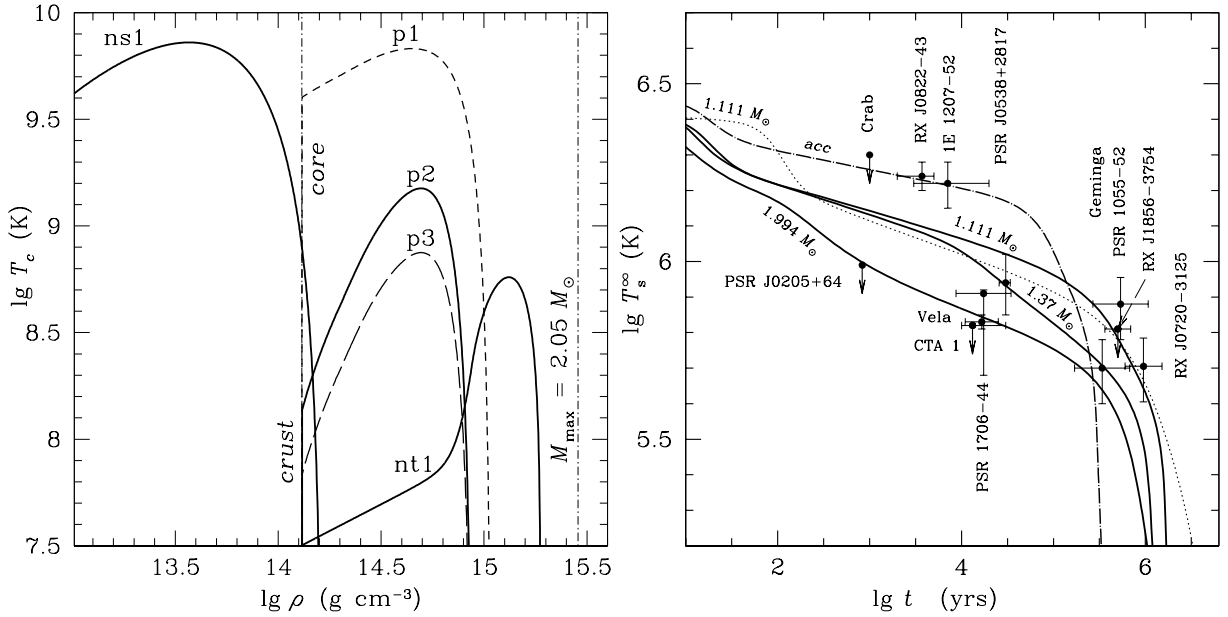


Рис. 2.4: Слева: Критические температуры в зависимости от плотности для трех моделей p1, p2 и p3 синглетной сверхтекучести протонов и одной модели триплетной сверхтекучести нейтронов nt1 в ядре звезды, а также для модели синглетной сверхтекучести нейтронов ns1 в коре. Вертикальными штрих-пунктирными линиями показана граница кора-ядро и центральная плотность звезды максимальной массы. Справа: Наблюдательные данные о поверхностной температуре изолированных нейтронных звезд (см. таблицу 1.1) и кривые остывания. Сплошными линиями показаны кривые остывания нейтронных звезд разных масс (массы указаны рядом с кривыми остывания), построенные для моделей сверхтекучести нуклонов ns1, nt1 и p2. Штрих-пунктирной линией показана кривая остывания звезды с массой  $M = 1.111 M_{\odot}$  для тех же моделей сверхтекучести, но с учетом аккреционной оболочки массы  $\Delta M = 10^{-8} M$ . Точечная кривая остывания построена для несверхтекучей звезды с массой  $M = 1.111 M_{\odot}$  без аккреционной оболочки.

техин и др. [125], Гепперт и др. [33].) Эти дополнительные регуляторы остывания особенно важны в маломассивных звездах.

Синглетная сверхтекучесть свободных нейтронов подавляет процесс излучения нейтрино при нейтрон-нейтронных столкновениях, а также приводит к излучению нейтрино при куперовском спаривании нейтронов во внутренней коре звезды. Последний процесс более эффективен, что вызывает ускорение остывания нейтронных звезд на ранних стадиях [ $t \lesssim (10^2 - 10^3)$  лет].

Оболочки из легких аккреционных элементов (в основном, из водорода или гелия) увеличивают электронную теплопроводность по сравнению с оболочками из железа (рассеяние электронов на легких ионах менее эффективно). Это приводит к более высокой поверхностной температуре звезды при условии, что температура  $T_{\text{env}}$  звездного вещества на нижней границе аккреционной оболочки одинакова. Соответственно, при одной и той же температуре  $T_{\text{env}}$  кривые остывания звезд с аккреционными оболочками из легких элементов проходят выше, чем кривые остывания звезд с железными оболочками. Чем больше масса аккреционных легких элементов  $\Delta M$ , тем выше поверхностная температура звезды. Однако, необходимым ограничением на  $\Delta M$  является условие  $\Delta M \lesssim 10^{-7} M$ , где  $M$  – масса звезды. Дело в том, что при  $\Delta M \gtrsim 10^{-7} M$  плотность нижней границы аккреционной оболочки становится порядка  $\rho_{\text{env}} \sim 10^{10}$  г см<sup>-3</sup>. В таких условиях легкие элементы (включая углерод и кислород) быстро перегорают в более тяжелые элементы.

Покажем, что учет аккреционных оболочек позволяет существенно снизить критические температуры протонов в ядрах нейтронных звезд, необходимые для объяснения наиболее горячих для своего возраста источников RX J0822–4300 и 1E 1207.4–5209. Более низкие критические температуры протонов получались в расчетах Зуо и др. [61] и Такацуки и Тамагаки [139]. При моделировании остывания нейтронных звезд мы будем также учитывать синглетную сверхтекучесть нейтронов в коре.

На левой части рис. 2.4 помимо уже рассмотренных в главе 2 моделей nt1 и p1 представлены модель синглетной сверхтекучести нейтронов в коре



звезды ns1 и две модели умеренной сверхтекучести протонов p2 и p3 в ядре звезды. На правой части рис. 2.4 приведены данные наблюдений источников из таблицы 1.1 и кривые остывания, построенные для нейтронных звезд разных масс (массы звезд указаны возле кривых остывания). Здесь, как и выше в главе 2, мы используем уравнение состояния Душена и Хэнсела [54] в ядре звезды. Точками показана кривая остывания несверхтекучей нейтронной звезды с массой  $M = 1.111M_{\odot}$ . Сплошными линиями показаны кривые остывания звезд с массами  $M = 1.111M_{\odot}$  (маломассивная звезда),  $1.37M_{\odot}$  (звезда средней массы) и  $1.994M_{\odot}$  (массивная звезда). Эти кривые остывания построены для моделей сверхтекучести нейтронов и протонов ns1, nt1 и p2. Видно, что без учета аккреционных оболочек, наблюдательные данные по наиболее горячим источникам RX J0822–4300 и 1E 1207.4–5209 не могут быть объяснены в предположении умеренной сверхтекучести протонов p2. Это связано с более слабым подавлением модифицированного урка-процесса в ядрах маломассивных звезд сверхтекучестью p2 по сравнению с подавлением сверхтекучестью p1. Ситуация, однако, изменяется, если дополнительно учесть возможное наличие у звезды аккреционной оболочки. Штрихпунктирной линией показано остывание звезды с массой  $M = 1.111M_{\odot}$  для тех же моделей сверхтекучести при наличии у звезды аккреционной оболочки с массой  $\Delta M = 10^{-8}M$ . Учет аккреционной оболочки повышает поверхностную температуру звезды, делая объяснение источников RX J0822–4300 и 1E 1207.4–5209 возможным в рамках выбранной модели сверхтекучести протонов p2. В работе Каминкера и др. [68] показано, что модель сверхтекучести p3 является предельной для объяснения данных наблюдений с учетом аккреционных оболочек (иными словами, модели протонной сверхтекучести с более низкими критическими температурами не в состоянии объяснить наблюдательные данные).

Обсудим теперь кратко, как изменится предложенный сценарий остывания, если мы выберем уравнение состояния плотного вещества, которое открывает прямой урка-процесс при плотностях  $\rho > 10^{15} \text{ g cm}^{-3}$  (в ядрах наиболее массивных нейтронных звезд). Типичным таким примером является уравнение состояния Акмаля и Пандхарипанде [2]. Мы будем использо-

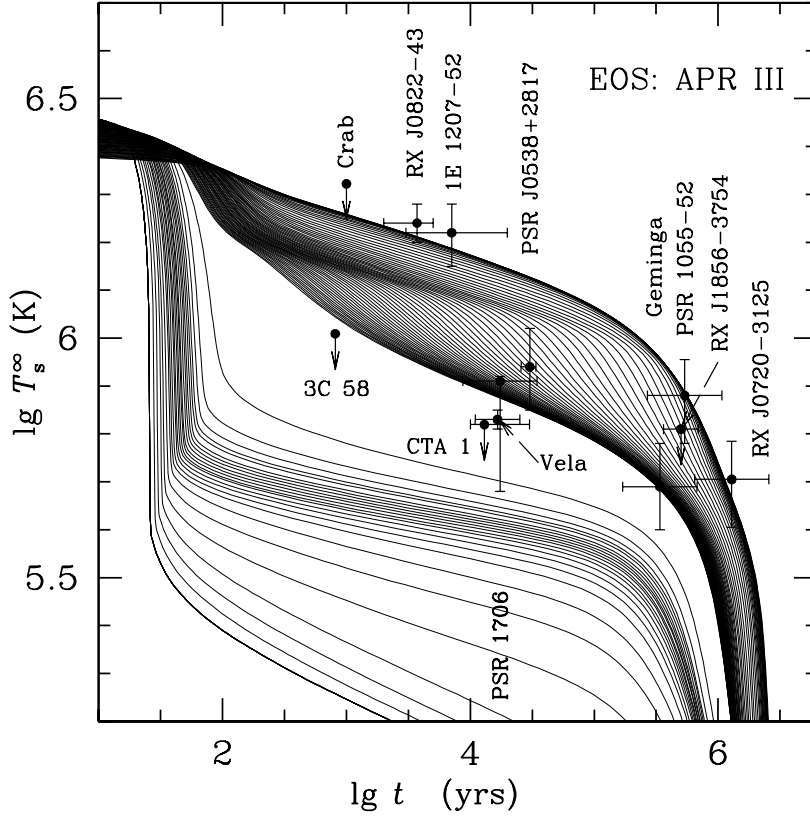


Рис. 2.5: Десяносто две кривых остывания, построенные для нейтронных звезд с массой от  $M = 1.01M_\odot$  (самая верхняя кривая) до  $M = 1.92M_\odot$  (самая нижняя кривая) с шагом по массе  $0.01M_\odot$ . Использованное уравнение состояния: APR3 (см. текст).

вать удобную параметризацию этого уравнения состояния, предложенную Гейзельбергом и Хйорт-Йенсенем [32]. По сравнению с [32], мы изменили лишь параметр  $\gamma$  в энергии симметрии  $S(n_b) = S_0(n_b/n_0)^\gamma$ , где  $S_0 = 32$  MeV;  $n_b = n_n + n_p$ ;  $n_0 = 0.16$  фм $^{-3}$  – концентрация нуклонов в атомных ядрах. А именно, мы взяли  $\gamma = 0.643$  вместо  $\gamma = 0.6$ . Это повысило энергию симметрии и тем самым понизило порог включения прямого урка-процесса с  $\rho_D = 1.680 \times 10^{15}$  г см $^{-3}$  до  $\rho_D = 1.275 \times 10^{15}$  г см $^{-3}$ . При этом зависимость давления от плотности  $P(\rho)$  практически не изменилась. В соответствии с принятыми в [45] обозначениями, будем называть такое уравнение состояния APR3. Максимальная масса звезды для выбранного уравнения состояния составляет  $M_{\max} = 1.929M_\odot$ . Окружный радиус и центральная плотность такой звезды равны:  $R = 10.39$  км,  $\rho_{\max} = 2.731 \times 10^{15}$  г см $^{-3}$ .

На рис. 2.5 для уравнения состояния APR3 построены девяносто две кривых остывания нейтронных звезд разных масс, от  $M = 1.01M_\odot$  до  $M = 1.93M_\odot$  (с шагом  $0.01M_\odot$ ). При этом использованы модельные зависимости  $T_{\text{сн,р}}(\rho)$  [45], практически не отличающиеся от моделей сверхтекучести nt1 и p1, принятых в данной главе (раздел 2.1). Из рисунка следует, что теперь можно выделить *пять* типов остывающих нейтронных звезд вместо трех. Три из них совпадают с рассмотренными в разделе 2.1: маломассивные, очень медленно остывающие звезды; массивные звезды, остывание которых ускорено излучением нейтрино при куперовском спаривании нейтронов; и звезды средних масс, показывающие промежуточное остывание. Кроме этого, возникает еще два типа нейтронных звезд: звезды максимальных масс, остывающие очень быстро за счет прямого урка-процесса; а также звезды, остывание которых является промежуточным между ускоренным остыванием, вызванным куперовским спариванием нейтронов, и очень быстрым остыванием, вызванным прямым урка-процессом (см. сгущение кривых остывания ниже надписи "Vela" на рисунке). Как видно, переход между ускоренным остыванием, обусловленным куперовским спариванием нейтронов, и очень быстрым остыванием, обусловленным прямым урка-процессом, достаточно резок, так что число источников, попадающих в область промежуточного остывания, не велико. Нейтронные звезды максимальных масс

являются чрезвычайно холодными (с температурой  $T_s^\infty \sim 2 \times 10^5$  К при  $t \sim 10^4$  лет; такие звезды обсуждались, например, Каминкером и др. [65]). Открытие этих звезд определенно указывало бы на действие прямого урка-процесса в их ядрах. Тот факт, что в некоторых остатках сверхновых тепловое излучение от изолированных нейтронных звезд несмотря на тщательные поиски не обнаружено (Каплан и др. [70]), косвенно может свидетельствовать об очень низкой поверхностной температуре этих звезд.

Подробнее вопросы, затронутые в разделе 2.4, рассмотрены в работах Каминкера и др. [68] и Гусакова и др. [45].

## 2.5 Основные результаты второй главы

Мы предложили новый сценарий остывания изолированных нейтронных звезд. Мы показали, что наблюдательные данные о тепловом излучении изолированных нейтронных звезд можно объяснить в предположении, что прямой урка-процесс в нейтронных звездах со стандартным ядерным составом (нейтроны с примесью протонов, электронов и мюонов) запрещен. В нашем сценарии ускоренное остывание, которое необходимо для объяснения нейтронных звезд, наиболее холодных для своего возраста, возникает благодаря процессу нейтринного энерговыделения при куперовском спаривании нейтронов. Мы показали, что нейтринная светимость, обусловленная этим процессом (при внутренней температуре звезды  $T \lesssim 0.6 T_{\text{cn}}^{\text{max}}$ ), пропорциональна  $T^8$ . В этом смысле она “имитирует” нейтринную светимость несверхтекучих маломассивных нейтронных звезд, однако может быть на один-два порядка больше. Предложенный сценарий остывания возможен при очень жестких ограничениях на профиль критической температуры нейтронов  $T_{\text{cn}}(\rho)$ . Эти ограничения возникают при сравнении теории остывания с наблюдениями двух “тестовых” источников – PSR J0205+6449 и пульсара в созвездии Вела (раздел 2.3). Предложенный сценарий впервые использует умеренную сверхтекучесть нейтронов и связанное с ней нейтринное излучение для объяснения данных наблюдений (в отличие от предыдущих сценариев остывания, в которых умеренная сверхтекучесть только препятствовала интерпретации наблюдений, см., например, Каминкер и др. [65]).

Для интерпретации наблюдений в рамках предложенного сценария требуется сильная протонная сверхтекучесть и умеренная сверхтекучесть нейтронов в ядрах нейтронных звезд (раздел 2.1). Протонная сверхтекучесть необходима для объяснения наблюдений наиболее горячих для своего возраста нейтронных звезд, в то время как нейтронная сверхтекучесть требуется для объяснения наблюдений звезд, наиболее холодных для своего возраста. Однако, как было показано в главе 1, кривые остывания не слишком чувствительны к замене нейтронной сверхтекучести на протонную и наоборот ( $T_{\text{cp}}(\rho) \rightleftharpoons T_{\text{cn}}(\rho)$ ). Таким образом, мы могли бы в принципе объяснить наблюдательные данные в сценарии с сильной сверхтекучестью нейтронов и умеренной сверхтекучестью протонов в ядрах звезд.

Сильная сверхтекучесть нужна для того, чтобы подавить прямой урка-процесс в маломассивных звездах, поднять поверхностную температуру таких звезд и объяснить наблюдения наиболее горячих для своего возраста нейтронных звезд. В действительности, мы можем поднять температуру маломассивных нейтронных звезд, предположив у них наличие поверхностного слоя из легких (аккреционных) элементов. Масса легких элементов может уменьшаться со временем, например, вследствие диффузионного ядерного горения водорода (Ченг и Билдстен [165]), что дополнительно может влиять на остывание. Таким образом, наличие сильной (протонной или нейтронной) сверхтекучести в ядре нейтронной звезды не является необходимым для нашей интерпретации наблюдательных данных (раздел 2.4). В то же время наличие умеренной сверхтекучести (нейтронов или протонов) с довольно жестко фиксированной зависимостью критической температуры от плотности (раздел 2.3), является необходимой составляющей этого сценария. При этом, однако, надо иметь в виду, что ограничения на возможный вид этой зависимости получены при использовании очень простого уравнения состояния в ядрах нейтронных звезд (нуклонный состав, прямой урка-процесс запрещен). Мы полагаем, что этот сценарий следует рассматривать наравне со многими другими сценариями (предложенными или описанными, например, Пажем [119, 120], Цурутой и др. [143], Ходелем и др. [159], Блашке и др. [21], Яковлевым и Петиком [183], Яковлевым и др. [185]).

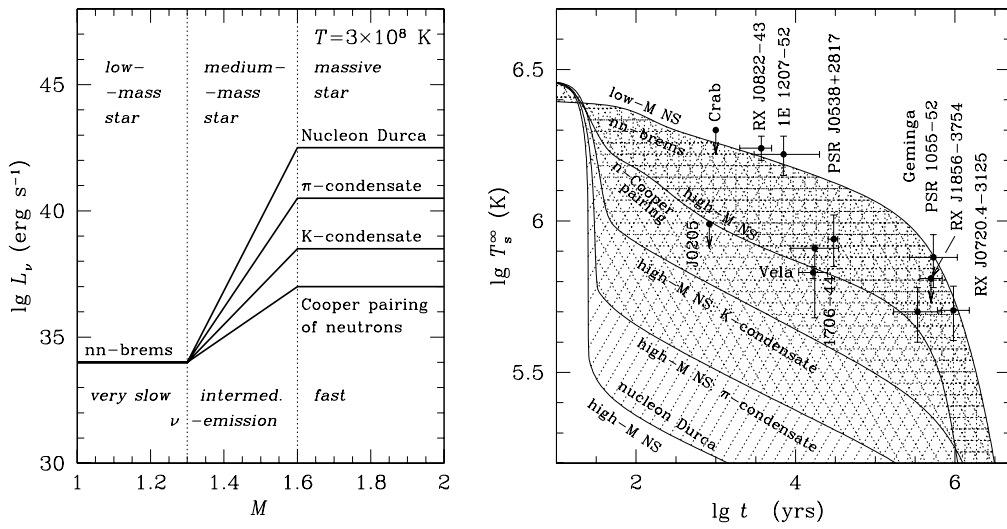


Рис. 2.6: Слева: Схематическая зависимость нейтринной светимости  $L_\nu$  от массы звезды с внутренней температурой  $T = 3 \times 10^8$  K для четырех качественно различных моделей внутреннего строения нейтронных звезд, отвечающих четырем сценариям остывания. Справа: Четыре заштрихованных области, каждая из которых заполнена кривыми остывания нейтронных звезд разных масс для четырех сценариев остывания из левой части рисунка.

На рис. 2.6 сценарий остывания, предложенный в главе 2, сравнивается с тремя другими основными сценариями остывания нейтронных звезд. Эти сценарии отличаются друг от друга механизмом остывания, обеспечивающим ускоренное охлаждение массивных нейтронных звезд. Механизм ускоренного остывания в первом сценарии (на рисунке он называется "Nucleon Durca") – прямой урка-процесс в веществе, состоящем из нуклонов. Механизмы ускоренного остывания во втором и третьем сценариях – аналоги прямого урка-процесса в пионном (" $\pi$ -condensate") и каонном ("K-condensate") конденсатах, соответственно. Энерговыделение всех трех процессов, подавленных сверхтекучестью, пропорционально  $\sim T^6$  (но существенно различается по величине), в отличие от излучения нейтрино при куперовском спаривании нейтронов, энерговыделение которого пропорционально  $\sim T^8$ .

На левой части рис. 2.6 для четырех рассмотренных выше сценариев качественно показана зависимость нейтринной светимости звезды от ее массы. Внутренняя температура звезды принята равной  $T = 3 \times 10^8$  K. Как

видно из рисунка, для всех четырех сценариев остывания можно выделить три типа остывающих нейтронных звезд (см. также главу 1): маломассивные нейтронные звезды, остывающие в основном за счет излучения нейтрино при нуклон-нуклонных столкновениях (область, помеченная "low-mass star"); массивные звезды, в которых наиболее эффективен механизм ускоренного остывания ("massive star") и нейтронные звезды средних масс, в которых механизм ускоренного остывания частично подавлен ("medium-mass star").

На правой части рис. 2.6 для каждого из четырех сценариев остывания заштрихована область, заполненная кривыми остывания (пространство, ограниченное самой верхней кривой остывания, помеченной "low-M NS" и одной из четырех кривых остывания, помеченных "high-M NS"). Видно, что в отличие от остальных сценариев остывания, сценарий, предложенный в главе 2, не может объяснить существование звезд, более холодных, чем пульсар в созвездии Парусов. Тем не менее, модификация этого сценария остывания, допускающая открытие прямого урка-процесса в ядрах наиболее массивных нейтронных звезд (и обсужденная в разделе 2.4), позволяет объяснять такие источники.

Ясно, что истинный сценарий остывания должен быть определен в результате дальнейших наблюдений нейтронных звезд и последующего сравнения наблюдательных данных с теоретическими моделями.

## ГЛАВА 3

### ПРЯМОЙ УРКА-ПРОЦЕСС В МАНТИИ НЕЙТРОННОЙ ЗВЕЗДЫ

#### 3.1 Введение к главе 3

Хорошо известно (см. раздел 1.1.1), что прямой урка-процесс является наиболее мощным процессом нейтринного излучения во внутреннем ядре нейтронных звезд. Напомним, что для плотного вещества, состоящего из нейтронов, протонов и электронов, прямая и обратная реакции для этого процесса имеют вид (см. также 1.1):

$$n \rightarrow p + e + \bar{\nu}_e, \quad p + e \rightarrow n + \nu_e, \quad (3.1)$$

где  $\nu_e$  и  $\bar{\nu}_e$  – электронные нейтрино и антинейтрино, соответственно. Процесс разрешен законом сохранения импульса при условии, что  $p_{\text{Fn}} < p_{\text{Fp}} + p_{\text{Fe}}$  и запрещен в противном случае. Нейтринный импульс  $p_\nu \sim k_B T / c$  много меньше этих ферми-импульсов, поэтому им можно пренебречь в законе сохранения импульса ( $T$  – внутренняя температура нейтронной звезды;  $k_B$  – постоянная Больцмана,  $c$  – скорость света). Оказывается, что прямой урка-процесс разрешен только при достаточно высоких плотностях (обычно, при плотностях порядка нескольких  $\rho_0$ , где  $\rho_0 = 2.8 \times 10^{14}$  г см<sup>-3</sup> – плотность вещества в атомных ядрах) для модельных уравнений состояния плотного вещества с большой энергией симметрии (то есть с довольно высокой концентрацией протонов), которая необходима для того, чтобы удовлетворить неравенству  $p_{\text{Fn}} < p_{\text{Fp}} + p_{\text{Fe}}$ .

Таким образом, прямой урка-процесс запрещен в ядрах маломассивных нейтронных звезд. В этом случае главным механизмом энерговыделения несверхтекучих ядер нейтронных звезд является модифицированный урка-процесс (см. формулы 1.2 и 1.3; дополнительный нуклон в этих формулах



необходим для выполнения закона сохранения импульса). Модифицированный урка-процесс на 6–7 порядков слабее прямого урка-процесса. Поэтому нейтринное излучение маломассивных нейтронных звезд значительно слабее излучения массивных звезд, в которых прямой урка-процесс открыт.

В этой главе мы исследуем возможность включения прямого урка-процесса во внутренней коре нейтронной звезды. Основная идея заключается в том, что избыток импульса может поглощаться неоднородными ядерными структурами коры. Мы рассмотрим модель несферических периодических ядерных структур, которые появляются в интервале плотностей от  $\rho \approx 10^{14}$  г см<sup>-3</sup> до границы кора-ядро ( $\rho_{cc} \approx \rho_0/2$ ) для некоторых моделей нуклон-нуклонных взаимодействий (Равенхолл и др. [129], Петик и Равенхолл [123]). С увеличением  $\rho$  теория предсказывает ряд фазовых переходов внутри указанного интервала плотностей: от хорошо известных сферических ядер к цилиндрическим ядерным структурам, от цилиндров к плоским структурам, от плоскостей к инвертированным цилиндрам, затем к инвертированным сферам и, наконец, (при  $\rho = \rho_{cc}$ ) к однородной ядерной материи в ядре звезды. Прослойка несферических ядер в коре, иногда называемая *мантией нейтронной звезды*, является тонкой (не толще нескольких сотен метров), но в ней содержится заметная часть от массы коры. Мы рассмотрим две последние фазы – инвертированные сферы и инвертированные цилиндры, в которых появляются свободные протоны (в дополнение к свободным нейтронам во внутренней коре), но периодические ядерные структуры все еще сохраняются (вещество не является однородной ядерной материей). Эти периодические структуры модулируют движение нейтронов и протонов (при этом волновые функции нуклонов – блоховские состояния) и открывают прямой урка-процесс в мантии нейтронных звезд.

### 3.2 Потенциальная энергия нуклонов в мантии звезды и нуклонные волновые функции

Для того, чтобы рассчитать нейтринное энерговыделение в ходе прямого урка-процесса в мантии нейтронной звезды, необходимо знать волновые функции нейтронов и протонов в периодическом ядерном потенциале. Для по-

нимания основных особенностей проблемы мы использовали упрощенную аппроксимацию Томаса-Ферми. При описании ядерных структур мы опирались на результаты Оямацу [114]. А именно, мы использовали его модель I для функционала плотности энергии. Потенциальная энергия нейтронов и протонов ( $j = n$  или  $p$ ) может быть представлена в виде:

$$V_j(r) = \frac{\partial}{\partial n_j} \left\{ (\epsilon_0(n_n, n_p) - \frac{3}{5}(3\pi^2)^{2/3} \left( \frac{\hbar^2}{2m_n} n_n^{5/3} + \frac{\hbar^2}{2m_p} n_p^{5/3} \right)) \right\}, \quad (3.2)$$

где  $\epsilon_0(n_n, n_p)$  – плотность энергии однородной ядерной материи,  $m_j$  – масса нуклона,  $n_j(r)$  – локальная концентрация нуклонов сорта  $j$ , которая зависит от расстояния  $r$  от центра ядра внутри ячейки Вигнера-Зейца [уравнение (4.8) работы Оямацу [114]]. В уравнении (3.2) мы пренебрегли малыми поправками, зависящими от градиентов концентраций нуклонов. Для простоты мы рассмотрели скалярные (не зависящие от спинов) ядерные потенциалы.

Используя теорию возмущений Шредингера, блоховскую волновую функцию нуклона ( $n$  или  $p$ ) в периодическом потенциале  $V_j(r)$  можно записать в виде:

$$\Psi_{\mathbf{p}} = \frac{\chi_s}{\sqrt{V}} \left( e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}} + \sum_{\mathbf{q} \neq \mathbf{0}} V_{j\mathbf{q}} \frac{e^{i\mathbf{p}'\mathbf{r}}}{E_{\mathbf{p}} - E_{\mathbf{p}'}} \right) \equiv \frac{\chi_s}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{q}} C_{\mathbf{q}} e^{i\mathbf{p}'\mathbf{r}}, \quad (3.3)$$

где  $\mathbf{q}$  – вектор обратной решетки,  $\mathbf{p}' = \mathbf{p} + \mathbf{q}$ ;  $V$  – нормировочный объем;  $C_{\mathbf{0}} = 1$  и  $C_{\mathbf{q}} = V_{j\mathbf{q}} / (E_{\mathbf{p}} - E_{\mathbf{p}'})$  для  $\mathbf{q} \neq \mathbf{0}$ . Далее,  $\chi_s$  – единичный спинор ( $\chi_s \chi_{s'} = \delta_{ss'}$ );  $s = \pm 1$  – знак проекции спина нуклона на ось квантования;  $E_{\mathbf{p}} = \mathbf{p}^2 / 2m_j^*$  – невозмущенная энергия;  $\mathbf{p}_j$  – импульс;  $m_j^*$  – эффективная масса на ферми-поверхности и  $V_{j\mathbf{q}}$  – компонента Фурье потенциала  $V_j(r)$ :

$$V_{j\mathbf{q}} = \frac{1}{V_{\text{cell}}} \int_{\text{cell}} V_j(r) e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}} d\mathbf{r}, \quad (3.4)$$

Здесь  $V_{\text{cell}}$  – объем элементарной ячейки. Форма элементарной ячейки сложна, поэтому точный расчет величины  $V_{j\mathbf{q}}$  затруднителен. Однако расчет может быть упрощен, если принять во внимание короткодействующий характер ядерных сил. Благодаря короткодействию потенциал нуклонов должен

быть практически постоянен и равен граничному значению  $V_\infty$  вблизи границы элементарной ячейки. Вводя упрощенную ячейку Вигнера-Зейца эквивалентного объема, определяемую согласно Оямацу [114], стр. 434, можно найти:

$$\begin{aligned} V_{j\mathbf{q}} &= \frac{1}{V_{\text{WS}}} \int_{\text{cell}} (V_j(r) - V_\infty) e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}} d\mathbf{r} \\ &\approx \frac{1}{V_{\text{WS}}} \int_{\text{WS}} (V_j(r) - V_\infty) e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}} d\mathbf{r}, \end{aligned} \quad (3.5)$$

где использовано равенство:

$$\int_{\text{cell}} e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}} d\mathbf{r} = 0.$$

Теперь в формуле (3.5) можно проинтегрировать по упрощенной ячейке Вигнера-Зейца (то есть по цилиндру или по сфере для фаз инвертированных цилиндров или инвертированных сфер, соответственно).

В дальнейшем в этой главе, если это не оговорено особо, мы будем пользоваться системой единиц, в которой  $\hbar = c = k_{\text{B}} = V = 1$ . Отметим, что выражение (3.3) для нуклонной волновой функции перестает быть справедливым вблизи точек, отвечающих брэгговской дифракции нуклонов (когда  $|\mathbf{p}| = |\mathbf{p} + \mathbf{q}|$ ), что указывает на особую важность зонной структуры вблизи этих точек.

Однако, как будет показано ниже, нуклоны с такими “резонансными” волновыми функциями не вносят вклада в энерговыделение исследуемого нейтринного процесса.

### 3.3 Нейтринное энерговыделение прямого урка-процесса в мантии звезды

Энерговыделение  $Q$  прямого урка-процесса в мантии нейтронной звезды рассчитывается аналогично тому, как это было сделано для ядра звезды (Латтимер и др. [91]). Используя обозначения из обзора Яковлева и др. [179], можно получить:

$$Q = 2 \int \frac{d\mathbf{p}_n}{(2\pi)^3} dW_{i \rightarrow f} \epsilon_\nu f_n (1 - f_p) (1 - f_e), \quad (3.6)$$

где  $f_j$  – функция распределения Ферми-Дирака для частиц сорта  $j$  ( $=n, p, e$ );  $\epsilon_\nu$  – энергия нейтрино;  $dW_{i \rightarrow f}$  – дифференциальная вероятность распада нейтрона [рассчитанная с использованием волновых функций (3.3)]. Множитель 2 перед знаком интеграла учитывает энерговыделение в обратных реакциях прямого урка-процесса (при этом мы предполагаем выполнение условия бета-равновесия). После стандартных упрощений (см., например, Яковлев и др. [179]) и интегрирования по направлениям импульса нейтрино, получаем:

$$\begin{aligned} dW_{i \rightarrow f} \frac{d\mathbf{p}_n}{(2\pi)^3} &= \frac{(2\pi)^4}{(2\pi)^{12}} \sum_{\mathbf{q}_n, \mathbf{q}_p} \delta(\epsilon_n - \epsilon_p - \epsilon_e - \epsilon_\nu) \\ &\times \delta(\mathbf{p}'_n - \mathbf{p}'_p - \mathbf{p}_e) \\ &\times |M_{fi}|^2 4\pi \epsilon_\nu^2 d\epsilon_\nu \prod_{j=1}^3 p_{F_j} m_j^* d\epsilon_j d\Omega_j, \end{aligned} \quad (3.7)$$

где  $\epsilon_j$  – энергия частиц сорта  $j$ ;  $d\Omega_j$  – элемент телесного угла в направлении  $\mathbf{p}_j$ ;  $|\mathbf{p}_j| = p_{F_j}$  (то есть невозмущенный импульс частиц  $\mathbf{p}_j$  в дельта-функции, обеспечивающей закон сохранения импульса, берется на ферми-поверхности) и  $m_e^* = \mu_e$ , причем  $\mu_e$  – химический потенциал электронов. Наконец,

$$|M_{fi}|^2 = 2 G_F^2 \cos^2 \theta_C |C_{\mathbf{q}_n}|^2 |C_{\mathbf{q}_p}|^2 (f_V^2 + 3g_A^2) \quad (3.8)$$

– квадрат матричного элемента, просуммированный по спинам и усредненный по направлениям нейтринного импульса. Здесь  $G_F = 1.436 \times 10^{-49}$  эрг см<sup>3</sup> – константа Ферми слабого взаимодействия;  $\theta_C$  – угол Кабиббо,  $\sin \theta_C = 0.231$ ;  $f_V = 1$  – векторная константа взаимодействия и  $g_A = 1.26$  – аксиально-векторная константа взаимодействия Гамова-Теллера.

Главный член в сумме (3.7) по обратным векторам решетки отвечает векторам  $\mathbf{q}_n = \mathbf{q}_p = 0$ . Однако, в этом члене  $\mathbf{p}'_n = \mathbf{p}_n$ ,  $\mathbf{p}'_p = \mathbf{p}_p$  (см. формулу (3.3) и комментарии к ней), благодаря чему излучение нейтрино запрещено ( $p_n \geq p_{F_p} + p_{F_e}$ ) законом сохранения импульса. Таким образом, основной вклад в энерговыделение  $Q$  вносят другие слагаемые, у которых либо  $\mathbf{q}_n = 0$ , либо  $\mathbf{q}_p = 0$ . Оставшиеся члены, у которых  $\mathbf{q}_n \neq 0$  и  $\mathbf{q}_p \neq 0$  малы и ими можно пренебречь. Легко заметить, что удерживаемые нами члены в выражении для энерговыделения  $Q$  сконструированы таким способом, что обеспечивающая закон сохранения импульса дельта-функция автоматически исключает

“опасные” точки, в которых выполняется условие брэгговской дифракции. Например, легко проверить, что для вектора  $\mathbf{q}_n = 0$  условие брэгговской дифракции  $|\mathbf{p}_p| = |\mathbf{p}_p + \mathbf{q}_p|$  несовместимо с законом сохранения импульса в формуле (3.7).

Подставляя формулу (3.7) в (3.6) и интегрируя по энергиям и направлениям распространения частиц, легко получить:

$$Q(T, \rho) = Q_0(T, \rho) R(\rho), \quad (3.9)$$

$$Q_0(T, \rho) = \frac{457\pi}{10080} G_F^2 \cos^2 \theta_C (f_V^2 + 3g_A^2) m_n^* m_p^* m_e^* T^6 \\ \approx 4.0 \times 10^{27} \left( \frac{n_e}{n_0} \right)^{1/3} \frac{m_n^* m_p^*}{m_n m_p} T_9^6 \frac{\text{erg}}{\text{cm}^3 \text{ s}}, \quad (3.10)$$

$$R(\rho) = \sum_{j=n,p} \sum_{\mathbf{q}} \frac{(m_j^* V_j \mathbf{q})^2}{\alpha_j p_{Fj}^4} \\ \times \left[ F(2\alpha_j D_j^{\max} + \alpha_j^2) - F(2\alpha_j D_j^{\min} + \alpha_j^2) \right], \quad (3.11)$$

где  $n_e$  – концентрация электронов;  $n_0 = 0.16 \text{ фм}^{-3}$  – концентрация нуклонов в атомных ядрах;  $T_9 = T/10^9 \text{ К}$ ,  $\alpha_j = q/p_{Fj}$ ,  $D_j^{\min} = \max(-1, D_{j-})$ ,  $D_j^{\max} = \min(1, D_{j+})$ ,

$$F(x) = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{1+x} + 1}{\sqrt{1+x} - 1} \right| - \frac{\sqrt{1+x}}{x}, \\ D_{n\pm} = \frac{(p_{Fp} \pm p_{Fe})^2 - p_{Fn}^2 - q^2}{2p_{Fn}q}, \\ D_{p\pm} = \frac{(p_{Fn} \pm p_{Fe})^2 - p_{Fp}^2 - q^2}{2p_{Fp}q},$$

причем  $p_{Fn} - p_{Fp} - p_{Fe} \leq q \leq p_{Fn} + p_{Fp} + p_{Fe}$  [в противном случае  $F(x) = 0$ ]. В формуле (3.9)  $Q_0$  – энерговыделение в прямом урка-процессе, рассчитанное для однородной ядерной материи (в пренебрежении ограничением, связанным с законом сохранения импульса). Величина  $R$  может быть названа *фактором подавления*, который описывает ослабление процесса в мантии нейтронной звезды. Этот фактор зависит только от  $\rho$  (но не от  $T$ ). Энерговыделение  $Q \propto T^6$ , как и для хорошо известного прямого урка-процесса в ядре нейтронной звезды.

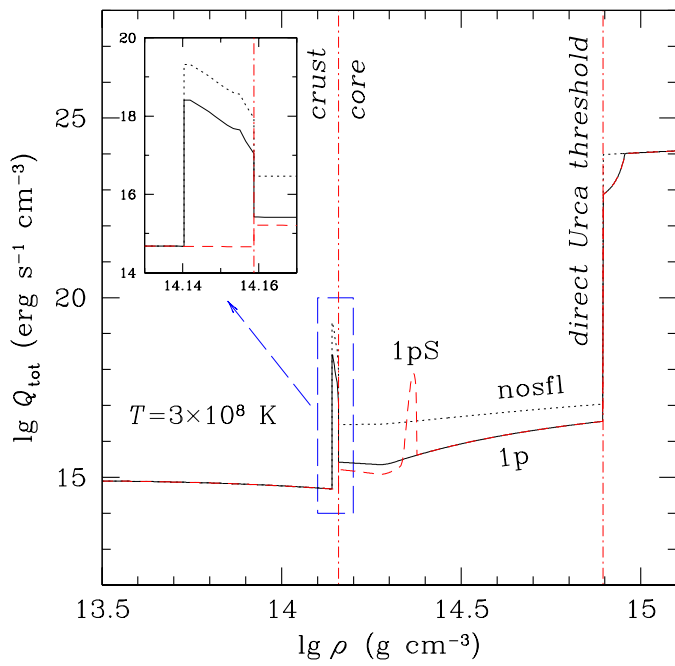


Рис. 3.1: Полное нейтринное энерговыделение как функция плотности при  $T = 3 \times 10^8$  К. Граница кора-ядро и порог включения прямого урка-процесса в ядре отмечены штрих-пунктирными линиями. Пик вблизи границы кора-ядро обусловлен прямым урка-процессом в мантии (изображен на вставке в более крупном масштабе). Точечная линия: сверхтекучести нет (nosfl); сплошная линия: модель 1p протонной сверхтекучести; пунктир: модель 1p протонной сверхтекучести в ядре и модель S нейтронной сверхтекучести в коре (см. текст). Спаривание нейтронов 1nt слабо и при данной температуре не влияет на нейтринное энерговыделение.

Для расчета  $R$  по формуле (3.11) мы должны знать ферми-импульсы частиц. Поскольку наш анализ приближенный, мы использовали две модели. В первой модели мы определяли ферми-импульсы частиц как:

$$p_{Fn} = (3\pi^2 n_n)^{1/3}, \quad p_{Fp} = p_{Fe} = (3\pi^2 n_p)^{1/3}, \quad (3.12)$$

где  $n_n$  и  $n_p$  – концентрации нуклонов, усредненные по ячейке Вигнера-Зейца [см. формулу 4.8 и таблицу 6 статьи Оямацу [114]] и  $p_{Fp} = p_{Fe}$  вследствие электронейтральности. Во второй модели мы использовали условие электронейтральности и бета-равновесия, определяя ферми-импульсы частиц из

уравнений:

$$p_{\text{Fe}} = p_{\text{Fp}}, \quad \frac{p_{\text{Fn}}^2}{2m_{\text{n}}} + V_{\text{n0}} = \frac{p_{\text{Fp}}^2}{2m_{\text{p}}} + V_{\text{p0}} + p_{\text{Fe}}, \quad (3.13)$$

где  $V_{j0}$  – основная ( $\mathbf{q} = \mathbf{0}$ ) фурье-гармоника нуклонного потенциала  $V_j(r)$ .

Факторы подавления  $R(\rho)$ , рассчитанные по формуле (3.11) для этих двух моделей, хорошо согласуются между собой. В наших расчетах мы положим  $m_j^* = m_j$ . Вариации  $m_j^*$  в разумных пределах не меняют качественно значения  $R(\rho)$ . Результаты, полученные при использовании модели (3.13), могут быть аппроксимированы следующими формулами:

$$\begin{aligned} R(\rho) &\approx R_2 + (R_1 - R_2)(1 - x)^2 \quad x < 1, \\ R(\rho) &\approx R_2/x^7 \quad x \geq 1, \end{aligned} \quad (3.14)$$

где  $R_1 = 6 \times 10^{-5}$ ,  $R_2 = 10^{-5}$ ,  $x = (n_{\text{b}} - n_1)/(n_2 - n_1)$ ,  $n_{\text{b}} = \rho/m_{\text{n}}$  – барионная концентрация;  $n_1$  и  $n_2$  – концентрация барионов на внутренней и внешней границах фазы инвертированных цилиндров. Таким образом, параметр  $x$  принимает значения от 0 до 1 в фазе инвертированных цилиндров и  $x > 1$  в фазе инвертированных сфер. В используемой модели Оямацу,  $n_1 = 0.08274$  фм $^{-3}$ ,  $n_2 = 0.08537$  фм $^{-3}$ , а слой инвертированных сфер простирается до барионных концентраций  $n_3 = 0.08605$  фм $^{-3}$  ( $x = 4.868$ ).

Число  $N$  обратных векторов решетки, вносящих вклад в фактор подавления  $R$ , велико:  $N \sim 200$  для фазы инвертированных цилиндров и  $N \sim 2800$  для фазы инвертированных сфер. Протонный вклад ( $\mathbf{q}_{\text{p}} \neq \mathbf{0}$ ) в  $R$  приблизительно в 3 раза больше чем вклад нейтронов ( $\mathbf{q}_{\text{n}} \neq \mathbf{0}$ ).

Как видно из формулы (3.14), типичные значения фактора подавления  $R \sim 10^{-5}$ . Таким образом, энерговыделение в ходе прямого урка-процесса в мантии нейтронной звезды приблизительно на 5 порядков меньше, чем энерговыделение во внутреннем ядре звезды. Тем не менее, как будет показано в следующем разделе, прямой урка-процесс может существенно влиять на остывание нейтронных звезд.

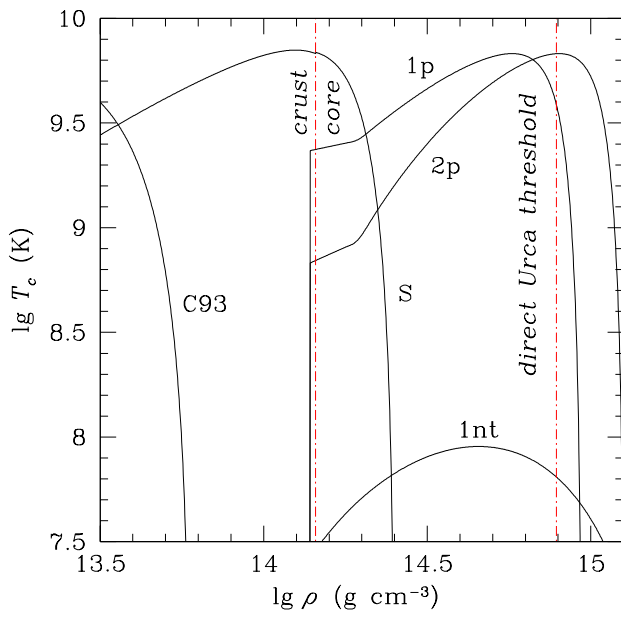


Рис. 3.2: Критические температуры  $T_c$  в зависимости от плотности  $\rho$  для различных моделей спаривания нейтронов и протонов в ядре и коре нейтронной звезды. Модели C93 и S: синглетное спаривание нейтронов в коре; модели 1p и 2p: синглетное спаривание протонов в ядре; модель 1nt: слабое триплетное спаривание нейтронов в ядре. Граница кора-ядро и пороговая плотность включения прямого урка-процесса показаны вертикальными штрих-пунктирными линиями.

### 3.4 Влияние прямого урка-процесса в мантии звезды на остывание маломассивных нейтронных звезд

Мы будем рассматривать достаточно маломассивные нейтронные звезды, в ядрах которых прямой урка-процесс запрещен. Нейтринная светимость  $L_\nu$  маломассивных нейтронных звезд не очень высока. Таким образом, дополнительное нейтринное энерговыделение из мантии может оказаться важным на нейтринной стадии остывания нейтронных звезд (когда возраст звезды  $t \lesssim 10^5$  лет).

Простая оценка энерговыделения  $L_\nu$  по порядку величины дает:

$$L_\nu \sim 4\pi R_{\text{cc}}^2 h Q + (4\pi/3) R_{\text{cc}}^3 Q_{\text{core}}, \quad (3.15)$$

где  $R_{\text{cc}}$  – радиус ядра;  $h$  – толщина мантии и  $Q_{\text{core}}$  – среднее нейтринное



энерговыведение в ядре звезды. Полагая  $R_{cc} = 10$  км и  $h = 100$  м, сразу получаем, что прямой урка-процесс в мантии может заметно влиять на остывание, если  $Q \gtrsim 30 Q_{\text{core}}$ , что вполне возможно. Например, это неравенство может выполняться для несверхтекучих маломассивных нейтронных звезд. Основное нейтринное излучение в ядрах таких звезд происходит за счет модифицированного урка-процесса, который на 6–7 порядков слабее прямого урка-процесса в коре массивных нейтронных звезд. В то же время прямой урка-процесс в мантии всего лишь на 5 порядков слабее, чем в ядрах массивных нейтронных звезд.

Проиллюстрируем эти утверждения при помощи более строгих вычислений. Мы будем использовать то же уравнение состояния Пракаша и др. [126] в ядрах звезд (их модель I для энергии симметрии с модулем сжатия симметричной ядерной материи  $K = 240$  МэВ), что и в главе 1. Типичная плотность маломассивной нейтронной звезды с  $M = 1.35 M_{\odot}$  составляет для этого уравнения состояния  $\rho_c = 7.79 \times 10^{14}$  г см<sup>-3</sup>, а радиус такой звезды равен  $R = 13.0$  км.

Мы моделировали остывание нейтронных звезд при помощи нашей программы остывания (см. главу 1). Мы модернизировали программу остывания, включив в нее блок, отвечающий за прямой урка-процесс нейтринного энерговыведения в звездной мантии. Мы рассмотрели несверхтекучие нейтронные звезды, а также нейтронные звезды со сверхтекучестью протонов и нейтронов в их внутренних слоях. Мы учитывали (i) возможное синглетное спаривание свободных нейтронов в коре и внешнем ядре, (ii) а триплетное спаривание нейтронов в ядре и (iii) а синглетное спаривание свободных протонов в мантии и в ядре звезды. Мы рассмотрели несколько моделей сверхтекучести (рис. 3.2): феноменологическую модель сильной синглетной сверхтекучести протонов 1p и феноменологическую модель нейтронной сверхтекучести 1nt в ядре нейтронной звезды (Каминкер и др. [65]); модели S (Шульце и др. [174]) и C93 (Чен и др. [167]) синглетного спаривания нейтронов в коре. Мы также ввели в рассмотрение дополнительную феноменологическую модель протонного спаривания в ядре 2p (не путать с моделью 2p из работы Каминкера и др. [65]!). Спаривание протонов в этой

модели на границе кора-ядро относительно слабо, но становится намного более сильным при более высоких плотностях  $\rho$ .

Влияние сверхтекучести на процессы нейтринного энерговыделения и теплоемкость вещества нейтронных звезд учитывалось стандартным образом (см. главу 1). Хорошо известно, что сверхтекучесть нуклонов подавляет основные процессы нейтринного энерговыделения, но взамен открывает процесс излучения нейтрино при куперовском спаривании нуклонов. Мы предположили, что спаривание свободных протонов и свободных нейтронов в мантии звезды описывается той же зависимостью  $T_c(\rho)$ , что и для протонов в ядре звезды и свободных нейтронов в коре (в обычной фазе сферических атомных ядер). Кроме того, мы пользовались теми же факторами подавления прямого урка-процесса сверхтекучестью нуклонов в мантии звезды, что и в ядре звезды.

На рисунке 3.1 показана зависимость от плотности полного нейтринного энерговыделения при температуре  $T = 3 \times 10^8$  К для несверхтекучих и нескольких моделей сверхтекучих нейтронных звезд, а на рис. 3.3 представлены соответствующие кривые остывания. Все кривые, кроме кривой, показанной короткими штрихами, рассчитаны для типичной маломассивной нейтронной звезды с массой  $1.35 M_\odot$ , в ядре которой прямой урка-процесс закрыт. Каждой паре кривых одного типа соответствует своя модель сверхтекучести. Верхняя кривая из каждой пары рассчитана в пренебрежении прямым урка-процессом в мантии звезды, в то время как нижняя кривая получена с учетом этого процесса. Кривая, нарисованная короткими штрихами, описывает остывание более массивной ( $M = 1.5 M_\odot$ ), несверхтекучей нейтронной звезды. Центральная плотность такой звезды равна  $\rho_c = 9.0 \times 10^{14}$  г см<sup>-3</sup>; во внутреннем ядре открыт прямой урка-процесс, обеспечивающий мощное нейтринное энерговыделение и быстрое остывание звезды. В этом случае влиянием прямого урка-процесса в мантии можно пренебречь; он не в состоянии состязаться со своим конкурентом в ядре.

Вместе с теоретическими кривыми остывания, на рис. 3.3 представлены наблюдательные данные по двум источникам: RX J0822–4300 и PSR B1055–52. Среди всех изолированных нейтронных звезд среднего возраста, у кото-

рых измерена поверхностная температура (см. раздел 1.2.1), показанные на рисунке источники являются наиболее горячими для своего возраста. Они могут быть интерпретированы как маломассивные нейтронные звезды.

Точечная линия на рис. 3.1 описывает нейтринное энерговыделение в несверхтекучей нейтронной звезде. Пик перед границей кора-ядро возникает благодаря действию прямого урка-процесса в мантии (показан также на вставке в крупном масштабе). Энерговыделение в максимуме пика приблизительно на 3 порядка превосходит энерговыделение в ядре нейтронной звезды. Соответствующие кривые остывания на рис. 3.3 показаны точками. Прямой урка-процесс в мантии заметно ускоряет остывание на временах  $t \sim 10^5$  лет.

Для случая сильного спаривания протонов  $1p$  и слабого триплетного спаривания нейтронов  $1nt$  в ядре и мантии звезды (без учета синглетного спаривания нейтронов в коре), мы получили зависимость энерговыделения от плотности, построенную на рис. 3.1 сплошной линией. Сверхтекучесть протонов полностью подавляет модифицированный урка-процесс во внешнем ядре, перед порогом включения прямого урка-процесса, и частично подавляет прямой урка-процесс во внутреннем ядре (массивных звезд) после порога. Спаривание нейтронов в ядре настолько слабо, что при температуре  $T = 3 \times 10^8$  К, для которой построен рис. 3.1, не проявляется. Нейтринное энерговыделение в ядрах маломассивных нейтронных звезд в этом случае очень слабо. Оно определяется главным образом процессами излучения нейтрино при нейтрон-нейтронных столкновениях. Это приводит к увеличению поверхностных температур нейтронных звезд среднего возраста (сплошные линии на рис. 3.3) и позволяет объяснить наблюдения источников RX J0822–4300 и PSR B1055–52 (см., например, Каминкер и др. [65], Яковлев и др. [181]). При этом протонная сверхтекучесть частично подавляет прямой урка-процесс в мантии и сокращает разницу между кривыми остывания, рассчитанными с учетом и без учета этого процесса. Отметим, что в рамках моделей сверхтекучести протонов и нейтронов  $1p$  и  $1nt$  можно объяснить наблюдения всех изолированных нейтронных звезд [поверхностные температуры которых были измерены/ограничены из анализа теплового излучения], считая, что остывающие нейтронные звезды имеют разные массы

(см., например, Каминкер и др. [65]). Видно, что учет прямого урка-процесса в мантии звезд не противоречит такой интерпретации.

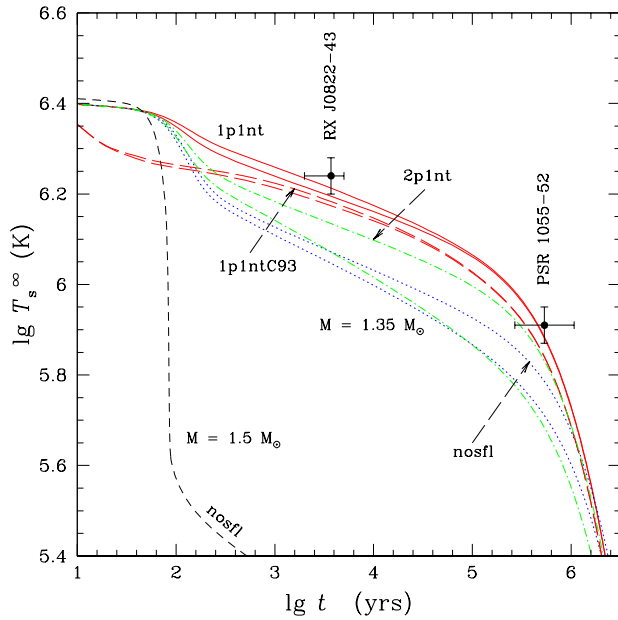


Рис. 3.3: Сравнение теоретических кривых остывания и наблюдений двух нейтронных звезд. Все кривые, кроме показанной короткими штрихами, построены для нейтронных звезд с массой  $1.35 M_{\odot}$  (прямой урка-процесс запрещен). Каждая пара линий одного типа относится к определенной модели сверхтекучести со включенным (нижняя кривая) или запрещенным (верхняя кривая) прямым урка-процессом в мантии. Точечные кривые: несверхтекучие нейтронные звезды (nosfl). Сплошные линии: сверхтекучесть протонов 1p и нейтронов 1nt в ядре звезды. Длинные штрихи: сверхтекучести 1p и 1nt в ядре и сверхтекучесть C93 нейтронов в коре. Штрих-пунктирные линии: сверхтекучесть 2p и 1nt в ядре. Короткие штрихи – несверхтекучая звезда с массой  $1.5 M_{\odot}$  и открытым прямым урка-процессом в ядре.

Если дополнительно включить синглетную сверхтекучесть нейтронов C93 в коре звезды, мы получим кривые остывания, изображенные длинными штрихами на рис. 3.3. Эти кривые идут немного ниже сплошных кривых. Дополнительное ускорение остывания обеспечивается благодаря процессу излучения нейтрино при куперовском спаривании нейтронов в коре. Влияние этого процесса мало, поскольку сверхтекучесть C93 ослабляется задол-

го до границы кора-ядро, приводя к слабой эффективности куперовского спаривания нейтронов (Потехин и др. [125]). Относительная важность прямого урка-процесса в мантии в этом случае даже меньше, чем в отсутствие сверхтекучести  $S93$ .

Добавление синглетной сверхтекучести нейтронов  $S$  вместо  $S93$  более существенно повлияло бы на остывание нейтронных звезд по двум причинам. Во-первых, сверхтекучесть  $S$  полностью выключает прямой урка-процесс в мантии (см. штриховую кривую на рис. 3.1; пик этой кривой в ядре звезды обусловлен нейтринным энерговыделением при спаривании нейтронов  $S$ ). Во-вторых, сверхтекучесть  $S$  занимает намного большую часть объема нейтронной звезды, чем сверхтекучесть  $S93$ , усиливая нейтринное энерговыделение при синглетном спаривании нейтронов. Это энерговыделение заметно понижает кривые остывания, усложняя интерпретацию источников RX J0822–4300 и PSR B1055–52. Мы не приводим на рис. 3.3 кривые остывания для этого маловероятного случая, поскольку они уже рассматривались в работе Потехина и др. [125].

Наконец, рассмотрим модель протонного спаривания  $2p$  и нейтронного спаривания  $1nt$  в ядре звезды (пренебрегая синглетным спариванием нейтронов в коре). Сверхтекучесть протонов  $2p$  подавляет нейтринное энерговыделение в большей части ядра, но не в мантии звезды. При этом эффект, производимый прямым урка-процессом в мантии на остывание нейтронной звезды с возрастом  $t \sim (10^4 - 10^5)$  лет, становится особенно значительным (штрих-пунктирные кривые на рис. 3.3). Маломассивная нейтронная звезда со включенным прямым урка-процессом в мантии остывает слишком быстро (нижняя штрих-пунктирная кривая), сильно усложняя интерпретацию наблюдений источников RX J0822–4300 и PSR B1055–52.

Подчеркнем, что наличие мантии у нейтронных звезд (то есть слоя несферических атомных ядер) все еще остается гипотезой. Теория предсказывает существование такого слоя только для определенных моделей нуклон-нуклонных взаимодействий. Поскольку нижняя штрих-пунктирная кривая на рис. 3.3 сильно противоречит наблюдениям, физическая модель, закладываемая при ее получении кажется маловероятной. Это может означать,

например, что модель  $2\tau$  сверхтекучести протонов не отвечает реальности, или сверхтекучесть нейтронов в мантии настолько высока, что в состоянии подавить там прямой урка-процесс, или что мантии вообще не существует.

Наш анализ остывания маломассивных нейтронных звезд не полон и носит иллюстративный характер. На остывание таких звезд в действительности влияют (*i*) сверхтекучесть в их недрах, (*ii*) поверхностные магнитные поля и (*iii*) возможное наличие поверхностного слоя из легких (аккрецированных) элементов (см., например, Потехин и др. [125], Каминкер и др. [68]). Наши расчеты указывают на существование четвертого регулятора остывания, (*iv*) наличия мантии у нейтронной звезды и связанного с ней прямого урка-процесса. Как следует из результатов Потехина и др. [125] и результатов данной главы, *все четыре регулятора остывания имеют сравнимую силу* и должны рассматриваться сообща. Такой многопараметрический анализ выходит за рамки настоящей диссертации.

### 3.5 Основные результаты третьей главы

Мы рассчитали нейтринное энергосвечение нового нейтринного механизма – прямого урка процесса в мантии нейтронных звезд – в тонком слое несферических ядер (Равенхолл и др. [129], Петик и Равенхолл [123]), расположенном вблизи ядра нейтронной звезды. Наличие мантии предсказывается многими моделями нуклон-нуклонных взаимодействий, однако ее существование все еще является гипотетическим. Если она существует, она не может заметно влиять на уравнение состояния и на гидростатическое равновесие нейтронных звезд (а следовательно, на их массу и радиус). Мы ожидаем, что наиболее существенным эффектом, связанным с мантией, является возможность включения прямого урка-процесса. Он может быть разрешен в двух последних фазах несферических ядер (инвертированные сферы и инвертированные цилиндры), в которых появляются свободные протоны (см., например, Оямацу [114]). Энергосвечение нового процесса в несверхтекучем веществе может на 2–3 порядка превосходить нейтринное энергосвечение во внешнем ядре несверхтекучей нейтронной звезды.

Для иллюстрации мы провели численное моделирование остывания ней-

тронных звезд, которое показало, что новый процесс может заметно влиять на тепловую эволюцию маломассивных звезд. Влияние этого процесса наиболее существенно в случае сильной сверхтекучести нуклонов в ядре звезды (чтобы подавить нейтринное энерговыделение в ядрах) и одновременно несверхтекучей мантии (чтобы прямой урка-процесс был там полностью открыт). Таким образом, прямой урка-процесс в мантии оказывается новым важным регулятором остывания маломассивных нейтронных звезд.

Наш расчет энерговыделения для этого нового процесса является упрощенным (основанным на модели Томаса-Ферми с упрощенной формой скалярных нуклонных взаимодействий и приближенным выбором ферми-импульса нуклонов). Расчет может быть улучшен, но можно ожидать, что основные результаты качественно не изменятся. Нельзя исключить (Джонс [52]), что прямой урка-процесс может быть разрешен также и в коре сферических атомных ядер или в каких-либо выделенных областях коры. Расчет энерговыделения в этом случае намного более сложен, поскольку требует знания точных нуклонных волновых функций. Если такой процесс в коре открыт, он может быть более мощным регулятором остывания нейтронных звезд, чем прямой урка-процесс в мантии.

Важно отметить, что свойства вещества субъядерной плотности могут в принципе исследоваться путем сравнения моделей остывающих нейтронных звезд с наблюдательными данными. Из приведенного анализа следует, что наиболее интересными (с точки зрения сравнения теории с наблюдениями) являются наблюдательные данные по нейтронным звездам, наиболее горячим для своего возраста.

## ГЛАВА 4

# ТЕПЛОВАЯ ЭВОЛЮЦИЯ КОЛЕБЛЮЩЕЙСЯ НЕЙТРОННОЙ ЗВЕЗДЫ

### 4.1 Введение к главе 4

Диссипативные процессы в нейтронных звездах играют важную роль, поскольку они определяют динамику затухания колебаний нейтронных звезд (см., например, Катлер и др. [72]). Колебания могут возбуждаться либо в процессе образования нейтронных звезд, либо на более поздних стадиях эволюции под действием внешних возмущений или из-за развития неустойчивостей. Неустойчивости, которые возникают во вращающихся нейтронных звездах в результате излучения гравитационных волн, могут подавляться диссипативными процессами. Это влияет на максимальную частоту вращения нейтронных звезд, а также на возможность детектирования их гравитационного излучения (см., например, Аррас и др. [12], Линдблом [100], Андерссон и Коккотас [4], Ждуник [55]).

Эволюцией колеблющейся нейтронной звезды с учетом ее остывания интересовались давно (см., Финци и Вольф [149] и ссылки там). Естественно, что расчеты Финци и Вольфа в 1967 году проводились с использованием упрощенных физических предположений и довольно грубой модели нейтронной звезды (см. раздел 4.4). Тем не менее, позднее при оценке характерных времен затухания пульсаций изменением температуры нейтронной звезды пренебрегалось (см., например, Катлер и Линдблом [71], Катлер и др. [72]). Такое приближение ведет к экспоненциальному затуханию колебаний. Однако оно не всегда оправдано, поскольку параметры, определяющие скорость затухания колебаний (например, коэффициенты объемной и сдвиговой вязкости), сами зависят от температуры.



Очевидно, что изменением температуры звезды при вычислении характерных времен затухания колебаний  $\tau$  можно заведомо пренебречь в том случае, если  $\tau \ll t_{\text{cool}}$  и  $E_{\text{puls}} \ll E_{\text{th}}$ , где  $t_{\text{cool}}$  – характерное время остывания звезды, а  $E_{\text{puls}}$  и  $E_{\text{th}}$  – ее пульсационная и тепловая энергии. Как будет показано ниже, для широкой области начальных температур и амплитуд пульсаций эти условия не выполняются.

В данной главе для простого случая радиальных колебаний несверхтекучих нейтронных звезд, ядра которых состоят из нейтронов, протонов и электронов, проведен самосогласованный расчет диссипации энергии колебаний с учетом тепловой эволюции звезд. Этот расчет расширяет и обобщает анализ Финци и Вольфа [149] (более подробно см. раздел 4.4). В качестве механизмов диссипации рассмотрена *нелинейная* (по амплитуде пульсаций) объемная вязкость в ядре звезды, а также сдвиговая вязкость. Остальными возможными механизмами диссипации пренебрегается. В частности, не учитываются эффекты затухания колебаний, связанные с магнитным полем звезды (они подробно рассмотрены, например, МакДермоттом и др. [103], [104]) – магнитное поле считается слабым.

## 4.2 Собственные функции и частоты радиальных колебаний звезд без учета диссипации

В этом разделе кратко опишем радиальные колебания нейтронной звезды без учета диссипации. Впервые такое рассмотрение было проведено Чандрасекаром [166], на результаты которого мы и будем ссылаться. Метрика для сферически симметричной звезды, которая испытывает радиальные возмущения, имеет вид:

$$ds^2 = -e^\nu dt^2 + r^2 d\Omega^2 + e^\lambda dr^2, \quad (4.1)$$

где  $r$  и  $t$  – радиальная и временная координаты;  $d\Omega$  – элемент телесного угла (в сферической системе координат с началом в центре звезды). Здесь и ниже используем систему единиц, в которой скорость света  $c = 1$ . Функции  $\nu$  и  $\lambda$  зависят только от  $r$  и  $t$  и могут быть представлены в виде:  $\nu(r, t) = \nu_0(r) + \delta\nu(r, t)$ ,  $\lambda(r, t) = \lambda_0(r) + \delta\lambda(r, t)$ . Здесь  $\nu_0(r)$  и  $\lambda_0(r)$  – метрические функции, описывающие невозмущенную стационарную звезду, а

$\delta\nu(r, t)$  и  $\delta\lambda(r, t)$  – добавки, обусловленные радиальными колебаниями звезды и определяемые формулами (36) и (40) статьи Чандрасекара [166].

Радиальные колебания нейтронной звезды находятся из решения задачи Штурма-Лиувилля (уравнение (59) статьи Чандрасекара [166]). Решением являются собственные частоты колебаний  $\omega_k$  и собственные функции  $\xi_k(r)$ , где  $\xi_k(r)$  – лагранжево смещение точки с радиальной координатой  $r$ . В пренебрежении диссипацией и нелинейным взаимодействием между модами (амплитуда колебаний считается малой,  $|\xi_k(r)| \ll r$ ), общее решение для  $k$ -ой моды может быть представлено в виде:  $\xi(r, t) = \xi_k(r) \cos \omega_k t$ . Граничные условия задачи Штурма-Лиувилля имеют вид:  $P(r = R + \xi(R, t)) = 0$ ,  $\xi(0, t) = 0$ , где  $P(r, t)$  – давление в точке с координатой  $r$ ;  $R$  – окружный радиус невозмущенной звезды.

В данной главе мы используем уравнение состояния Негеля и Вотрэна [113] в коре нейтронной звезды и уравнение состояния Гейзельберга и Хйорта-Йенсена [32] в ядре звезды. Последнее уравнение состояния является удобной аналитической аппроксимацией уравнения состояния Акмаля и Пандхарипанде [2]. Максимальная масса устойчивой нейтронной звезды, допускаемая принятым уравнением состояния, равна:  $M = M_{\max} = 1.92 M_{\odot}$ ; окружный радиус такой звезды  $R = 10.3$  км, центральная плотность  $\rho_c = 2.76 \times 10^{15}$  г см<sup>-3</sup>. Прямой урка-процесс открыт в ядрах звезд с массой  $M > 1.83 M_{\odot}$ .

Важным параметром, входящим в уравнение радиальных пульсаций, является адиабатический индекс  $\gamma$ . Поскольку частота радиальных колебаний звезды  $\omega_k \gg 1/t_{\text{Урка}}$ , где  $t_{\text{Урка}}$  – характерное время выравнивания равновесия по бета-процессам (см., например, Хэнсел и др. [162], Яковлев и др. [179]), то адиабатический индекс должен вычисляться в приближении “замороженного” ядерного состава (см., например, Бардин и др. [17]):

$$\gamma = \frac{\partial \ln P(n_b, x_e)}{\partial \ln n_b}, \quad (4.2)$$

где  $n_b$  – концентрация барионов,  $x_e = n_e/n_b$ ,  $n_e$  – концентрация электронов.

Относительную величину радиальных смещений колеблющейся звезды (без учета эффектов диссипации) будем задавать малым параметром  $\varepsilon$ , ко-

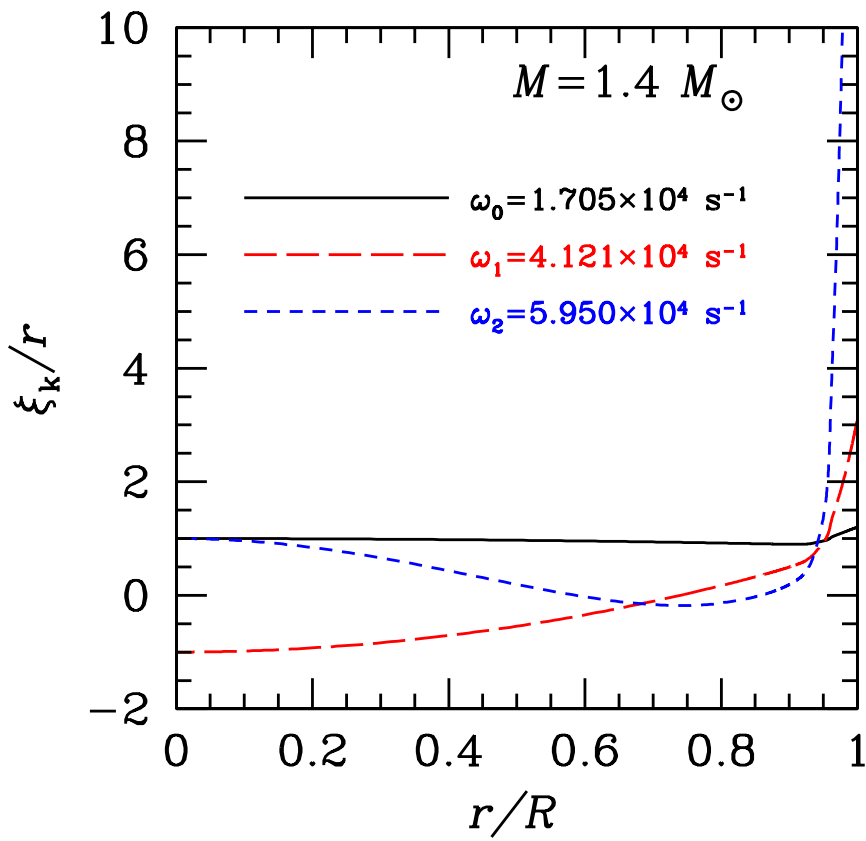


Рис. 4.1: Величина  $\xi_k/r$  (нормированная так, что  $|\varepsilon| = 1$ ) для фундаментальной, первой и второй моды радиальных колебаний звезды (сплошная линия, длинные и короткие штрихи) как функция радиальной координаты  $r$  в единицах радиуса звезды  $R$ .

торый определим условием:

$$\varepsilon = \lim_{r \rightarrow 0} \xi_k(r)/r. \quad (4.3)$$

Тем самым  $\varepsilon$  определяет нормировку функции  $\xi_k(r)$ .

На рисунке 4.1 построена величина  $\xi_k(r)/r$  (искусственно нормированная так, что  $|\varepsilon| = 1$ ) в зависимости от расстояния до центра звезды  $r$  (в единицах радиуса звезды  $R$ ) для первых трех радиальных мод с частотами  $\omega_0 = 1.705 \times 10^4 \text{ c}^{-1}$  (сплошная линия),  $\omega_1 = 4.121 \times 10^4 \text{ c}^{-1}$  (длинные штрихи) и  $\omega_2 = 5.950 \times 10^4 \text{ c}^{-1}$  (короткие штрихи). Здесь и далее для примера рассмотрена модель звезды с массой  $M = 1.4 M_\odot$  ( $R = 12.17 \text{ км}$ ,  $\rho_c = 9.26 \times 10^{14} \text{ г см}^{-3}$ ). Как и следовало ожидать, фундаментальная мода очень близка к

гомологическому решению  $\xi_0(r) = r$ . После введения постоянной нормировки получим  $\xi_0(r) = \varepsilon r$ . Поэтому для фундаментальной моды  $\varepsilon$  определяет относительные амплитуды смещений поверхности колеблющейся звезды.

В дальнейшем нам понадобится энергия колебаний, которую можно определить, например, сформулировав вариационный принцип для исследуемой задачи на собственные значения (см., например, Мельтцер и Торн [108]). Для  $k$ -ой радиальной моды:

$$E_{\text{puls}} = \frac{1}{2} \int (P + \rho) \left[ e^{(\lambda_0 - \nu_0)/2} \omega_k \xi_k \right]^2 e^{\nu_0/2} dV. \quad (4.4)$$

Здесь  $\rho$  – массовая плотность,  $dV = 4\pi r^2 e^{\lambda_0/2} dr$  – собственный элемент объема.

Учет диссипации энергии в  $k$ -ой моде приведет к слабому затуханию колебаний. В частности, для лагранжева смещения положим:

$$\xi(r, t) = C_k(t) \xi_k(r) \cos \omega_k t. \quad (4.5)$$

Здесь  $C_k(t)$  – медленно убывающая функция времени (характерное время диссипации  $\tau \gg 1/\omega_k$ ), которую будем называть *амплитудой пульсаций звезды*. Мы предполагаем, что диссипация “включается” в момент времени  $t = 0$ , так что начальное значение амплитуды

$$C_k(0) = 1. \quad (4.6)$$

Как следует из (4.4), с учетом диссипации пульсационная энергия  $k$ -ой моды может быть представлена в виде:

$$E_{\text{puls}}(t) = E_{\text{puls}0} C_k^2(t). \quad (4.7)$$

Пользуясь формулами (4.4) и (4.7), можно рассчитать пульсационную энергию фундаментальной моды:  $E_{\text{puls}}(t) \sim 2 \times 10^{53} \omega_4^2 \varepsilon^2 C_k^2(t)$  эрг. Тепловая энергия звезды примерно равна  $E_{\text{th}} \sim (4\pi/3) R^3 c_T T \sim 10^{48} T_9^2$  эрг, где  $c_T \propto T$  – удельная (на единицу объема) теплоемкость звездного вещества (см., например, Яковлев и др. [176]),  $T_9$  – внутренняя температура звезды в единицах  $10^9$  К,  $\omega_4 = \omega_k / (10^4 \text{ с}^{-1})$ . Из приведенных оценок видно, что существует широкая область значений параметров  $\varepsilon$ ,  $C_k(t)$  и  $T$ , при которых  $E_{\text{puls}} \gtrsim E_{\text{th}}$ . Как минимум в этих случаях необходимо учитывать изменение температуры звезды при затухании пульсаций.

### 4.3 Неравновесный модифицированный урка-процесс

Условие бета-равновесия в ядре нейтронной звезды имеет вид:  $\delta\mu(r, t) = \mu_n - \mu_p - \mu_e = 0$ , где  $\mu_i$  – химический потенциал частиц сорта  $i = n, p, e$ . Колебания звезды приводят к отклонению от бета-равновесия,  $\delta\mu(r, t) \neq 0$  и, как следствие, к диссипации пульсационной энергии. Темп диссипации определяется теми процессами, которые стремятся вернуть систему в равновесие. Мы будем предполагать, что прямой урка-процесс в ядре пульсирующей звезды запрещен. Тогда основным процессом, определяющим диссипацию колебаний достаточно горячей звезды, является модифицированный урка-процесс. В этом разделе рассмотрим неравновесный модифицированный урка-процесс, а также найдем связь между лагранжевым смещением  $\xi(r, t)$  и параметром неравновесности  $\delta\mu(r, t)$ , характеризующим локальное отклонение от бета-равновесия.

Неравновесный модифицированный урка-процесс обсуждался с конца 60ых годов (см. классическую работу Финци и Вольфа [149] и ссылки в ней). Тем не менее, эти старые исследования были верны лишь качественно (см., например, Хэнсел [161] и раздел 4.4). Позже проблема была рассмотрена сразу несколькими авторами (см., например, Хэнсел [161], Рейсенеггер [131], Хэнсел и др. [162]). В дальнейшем мы будем ссылаться на обзор Яковлева и др. [179], поскольку пользуемся схожими обозначениями. Модифицированный урка-процесс имеет две ветви, нейтронную и протонную (см. формулы 1.2, 1.3). При бета-равновесии нейтринное энерговыделение для этих двух каналов модифицированного урка-процесса дается формулами (более подробно см. Яковлев и др. 2001):

$$Q_{\text{eq}}^{(n)} \approx 8.1 \times 10^{21} \left( \frac{m_n^*}{m_n} \right)^3 \left( \frac{m_p^*}{m_p} \right) \left( \frac{n_p}{n_0} \right)^{1/3} T_9^8 \alpha_n \beta_n \text{ erg cm}^{-3} \text{ s}^{-1}, \quad (4.8)$$

$$Q_{\text{eq}}^{(p)} \approx Q_{\text{eq}}^{(n)} \left( \frac{m_p^*}{m_n^*} \right)^2 \frac{(p_{\text{Fe}} + 3p_{\text{Fp}} - p_{\text{Fn}})^2}{8p_{\text{Fe}}p_{\text{Fp}}} \Theta. \quad (4.9)$$

Здесь  $n_0 = 0.16 \text{ фм}^{-3}$  – концентрация нуклонов в атомных ядрах;  $n_p$  – концентрация протонов;  $m_n$  и  $m_p$  – массы свободных нейтронов и протонов;  $m_n^*$  и  $m_p^*$  – эффективные массы нейтронов и протонов в плотном веществе;

$\alpha_n, \beta_n \sim 1$  – поправочные коэффициенты (более подробно см. Яковлев и др. [179]). В формуле (4.9) функция  $\Theta=1$ , если протонная ветвь процесса разрешена законом сохранения импульса ( $p_{Fn} < 3p_{Fp} + p_{Fe}$ ), и  $\Theta = 0$  – если запрещена. Выражения (4.8) и (4.9) для энерговыделения могут быть получены из общей формулы (1.10) главы 1.

При бета-равновесии скорости прямой и обратной реакций модифицированного урка-процесса совпадают, то есть состав вещества не меняется с течением времени. При этом в реакциях могут участвовать лишь частицы вблизи своих поверхностей Ферми, с энергией  $|\epsilon_i - \mu_i| \lesssim k_B T$  ( $i = n, p, e$ ;  $k_B$  – постоянная Больцмана). Поэтому нейтринное энерговыделение зависит от температуры вещества, процесс не может протекать при  $T = 0$ . Принципиально иная ситуация возникает при отклонении от бета-равновесия ( $\delta\mu \neq 0$ ). В этом случае скорости прямой и обратной реакций различны; система стремится прийти в равновесие и состав вещества меняется, причем процесс открыт и при  $T = 0$ .

Пусть  $\Gamma$  и  $\bar{\Gamma}$  – количество прямых и обратных реакций модифицированного урка-процесса в единице объема в единицу времени. Аналитические выражения для  $\Delta\Gamma = \bar{\Gamma} - \Gamma$  и для скорости энерговыделения  $Q_{\text{noneq}} = Q^{(n)} + Q^{(p)}$  в неравновесном модифицированном урка-процессе были получены Рейсенеггером [131]:

$$\Delta\Gamma = \frac{14680}{11513} \frac{Q_{\text{eq}}}{k_B T} y H(y), \quad (4.10)$$

$$Q_{\text{noneq}} = Q_{\text{eq}} F(y), \quad (4.11)$$

где  $Q_{\text{eq}} = Q_{\text{eq}}^{(n)} + Q_{\text{eq}}^{(p)}$ ; а функции  $H(y)$  и  $F(y)$  равны:

$$H(y) = 1 + \frac{189\pi^2 y^2}{367} + \frac{21\pi^4 y^4}{367} + \frac{3\pi^6 y^6}{1835}, \quad (4.12)$$

$$F(y) = 1 + \frac{22020\pi^2 y^2}{11513} + \frac{5670\pi^4 y^4}{11513} + \frac{420\pi^6 y^6}{11513} + \frac{9\pi^8 y^8}{11513}. \quad (4.13)$$

Здесь  $y \equiv \delta\mu/(\pi^2 k_B T)$ ; множитель  $\pi^2$  в знаменателе введен для того, чтобы подчеркнуть, что истинным параметром разложения функций  $H(y)$  и  $F(y)$  в ряд по отклонениям от равновесия является величина порядка  $\delta\mu/(10k_B T)$  (а не просто  $\delta\mu/k_B T$ ). Из формул (4.10) и (4.11) следует наличие двух режимов пульсаций. Режим, в котором  $\delta\mu \ll k_B T$  ( $y \ll 1$ ), будем называть

подтепловым, а режим, в котором  $\delta\mu \gg k_B T$  ( $y \gg 1$ ) – надтепловым. В обоих режимах относительные смещения элементов вещества в пульсирующей звезде считаем малыми ( $\varepsilon \ll 1$ ). Как видно из формул, в надтепловом режиме  $\delta\mu$ ,  $\Delta\Gamma$  и  $Q_{\text{попек}}$  не зависят от температуры.

Найдем теперь связь между лагранжевым смещением  $\xi(r, t)$  и рассогласованием химических потенциалов  $\delta\mu(r, t)$ . Величину  $\delta\mu$  можно представить как функцию трех термодинамических переменных, например,  $n_b, n_e$  и  $T$ :  $\delta\mu = \delta\mu(n_b, n_e, T)$ . При колебаниях звезды эти переменные будут отклоняться от своих равновесных значений  $n_{b0}, n_{e0}$  и  $T_0$  на величины  $\Delta n_b(r, t), \Delta n_e(r, t)$  и  $\Delta T(r, t)$ . Считая отклонения от равновесия незначительными (что равносильно утверждению  $\varepsilon \ll 1$ ), можно разложить функцию  $\delta\mu(r, t)$  в ряд вблизи равновесных значений термодинамических переменных:

$$\begin{aligned} \delta\mu(r, t) = & \frac{\partial\delta\mu(n_{b0}, n_{e0}, T_0)}{\partial n_{b0}} \Delta n_b(r, t) + \frac{\partial\delta\mu(n_{b0}, n_{e0}, T_0)}{\partial n_{e0}} \Delta n_e(r, t) \\ & + \frac{\partial\delta\mu(n_{b0}, n_{e0}, T_0)}{\partial T_0} \Delta T(r, t). \end{aligned} \quad (4.14)$$

Последним членом в (4.14) можно пренебречь, поскольку  $\partial\delta\mu(n_{b0}, n_{e0}, T_0)/\partial T_0 \propto T_0$ ,  $\Delta T(r, t) \sim \Delta n_b(r, t) T_0/n_{b0}$  (см., например, Рейсенеггер [131]). Тем самым, для сильно вырожденного вещества ( $\mu_i \gg k_B T_0$ ,  $i = n, p, e$ ) этот член много меньше первых двух. В дальнейшем под температурой  $T$  мы везде будем понимать “среднюю” температуру  $T_0$  и пренебрегать колебаниями температуры относительно своего среднего значения при пульсациях звезды.

Определим вид функций  $n_b(r, t)$  и  $n_e(r, t)$ . Для этого воспользуемся уравнениями непрерывности для барионов и электронов:

$$(n_b u^\alpha)_{;\alpha} = 0, \quad (4.15)$$

$$(n_e u^\alpha)_{;\alpha} = \Delta\Gamma. \quad (4.16)$$

Здесь  $u^\alpha = dx^\alpha/ds$  – 4-скорость колеблющегося вещества. Обратим внимание на источник  $\Delta\Gamma$  в уравнении непрерывности для электронов. Он учитывает тот факт, что в звезде нет равновесия по бета-процессам.

Раскрывая ковариантные производные в формулах (4.15) и (4.16) в метрике (4.1) и ограничиваясь линейными по  $\xi(r, t)$  членами, получаем уравне-

ния:

$$\frac{\partial n_b}{\partial t} + \frac{e^{\nu_0/2}}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( n_{b0} r^2 e^{-\nu_0/2} \frac{\partial \xi(r, t)}{\partial t} \right) = 0, \quad (4.17)$$

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \frac{e^{\nu_0/2}}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( n_{e0} r^2 e^{-\nu_0/2} \frac{\partial \xi(r, t)}{\partial t} \right) = \Delta \Gamma e^{\nu_0/2}. \quad (4.18)$$

При выводе этих уравнений мы использовали формулу (36) статьи Чандра-секара [166] для поправки к метрике  $\delta\lambda(r, t)$  (см. раздел 4.2):

$$\delta\lambda(r, t) = -\xi(r, t) \frac{d}{dr} (\lambda_0 + \nu_0). \quad (4.19)$$

Уравнение (4.17) легко интегрируется и дает:

$$\Delta n_b(r, t) \equiv n_b(r, t) - n_{b0} = -\frac{e^{\nu_0/2}}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( n_{b0} r^2 e^{-\nu_0/2} \xi(r, t) \right). \quad (4.20)$$

Решение уравнения (4.18) может быть представлено в виде:

$$\Delta n_e(r, t) \equiv n_e(r, t) - n_{e0} = \Delta n_{e0}(r, t) + \Delta n_{e1}(r, t), \quad (4.21)$$

$$\Delta n_{e0}(r, t) = -\frac{e^{\nu_0/2}}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( n_{e0} r^2 e^{-\nu_0/2} \xi(r, t) \right). \quad (4.22)$$

Здесь  $\Delta n_{e0}(r, t)$  описывает вариации электронной концентрации без учета бета-процессов, а функция  $\Delta n_{e1}(r, t)$  описывает вариации, связанные с бета-процессами. Последняя функция удовлетворяет уравнению:

$$\frac{\partial \Delta n_{e1}}{\partial t} = \Delta \Gamma e^{\nu_0/2}, \quad (4.23)$$

причем в общем случае источник  $\Delta \Gamma$  сам является сложной функцией электронной концентрации  $n_e(r, t)$ . Нас, однако, интересует высокочастотный предел, в котором  $\omega_k \gg 1/t_{\text{Urca}}$  (см. раздел 4.2). В этом случае источник в правой части уравнения (4.18) мал по сравнению с остальными членами, то есть изменения концентрации электронов за счет бета-превращений в колеблющейся звезде относительно малы (см., например, Хэнсел и др. [162]). Поэтому с нужной нам точностью в формуле (4.14) малую величину  $\Delta n_{e1}$  можно опустить.

Подставляя выражения для  $\Delta n_b$  и  $\Delta n_e$  из формул (4.20) и (4.22) в (4.14), получаем искомую связь между  $\delta\mu(r, t)$  и  $\xi(r, t)$ :

$$\delta\mu(r, t) = -\frac{\partial \delta\mu(n_{b0}, x_{e0})}{\partial n_{b0}} n_{b0} \frac{e^{\nu_0/2}}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 e^{-\nu_0/2} \xi(r, t) \right). \quad (4.24)$$



Заметим, что в (4.24) частная производная по  $n_{b0}$  берется при постоянном значении  $x_{e0} = n_{e0}/n_{b0}$ . Используя формулу (4.24), можно выразить параметр  $y = \delta\mu/(\pi^2 k_B T)$ , а следовательно  $\Delta\Gamma$  и  $Q_{\text{noneq}}$  (см. формулы (4.10) и (4.11)), через лагранжево смещение  $\xi(r, t)$ . Для случая нерадиальных колебаний вывод связи между  $\delta\mu(r, t)$  и  $\xi(r, t)$  аналогичен проведенному в этом разделе.

#### 4.4 Уравнения тепловой эволюции и затухания колебаний звезд в отсутствие бета-равновесия

Получим уравнение теплового баланса для пульсирующей нейтронной звезды. Будем учитывать три основных диссипативных механизма: сдвиговую вязкость в ядре звезды, неравновесные бета-процессы в ядре звезды и теплопроводность. Запишем уравнения релятивистской гидродинамики, описывающие закон сохранения энергии и импульса:

$$T^{\alpha\beta}_{;\beta} = -Q_\nu u^\alpha. \quad (4.25)$$

Здесь  $Q_\nu$  – суммарное нейтринное энергосвечение во всех нейтринных процессах (включая неравновесный модифицированный урка-процесс, см. формулу (4.11)) в единице объема в единицу времени;  $T^{\alpha\beta}$  – диссипативный тензор энергии-импульса, который может быть записан в виде (см., например, Вайнберг [29]):

$$T^{\alpha\beta} = P g^{\alpha\beta} + (P + \rho) u^\alpha u^\beta + \Delta T^{\alpha\beta}_{\text{shear}} + \Delta T^{\alpha\beta}_{\text{cond}}, \quad (4.26)$$

$$\Delta T^{\alpha\beta}_{\text{shear}} = -\eta H^{\alpha\gamma} H^{\beta\delta} \left( u_{\gamma;\delta} + u_{\delta;\gamma} - \frac{2}{3} g_{\gamma\delta} u^\lambda_{;\lambda} \right), \quad (4.27)$$

$$\Delta T^{\alpha\beta}_{\text{cond}} = -\kappa (H^{\alpha\gamma} u^\beta + H^{\beta\gamma} u^\alpha) (T_{;\gamma} + T u_{\gamma;\delta} u^\delta), \quad (4.28)$$

где  $g^{\alpha\beta}$  – метрический тензор;  $\eta$  – коэффициент сдвиговой вязкости;  $\kappa$  – коэффициент теплопроводности;  $H^{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta} + u^\alpha u^\beta$  – проекционная матрица. В расчетах в качестве  $\eta$  мы использовали электронную вязкость  $\eta_e$  в ядре звезды из работы Чугунова и Яковлева [168]. Мы не учитывали сдвиговую вязкость нейтронов (протонной вязкостью можно пренебречь, см. Флауэрс и Ито [151]), поскольку ее значение сильно зависит от используемой модели

ядерных взаимодействий и способа учета многочастичных эффектов (аналогичная проблема для теплопроводности обсуждалась Байко и др. [14]). По порядку величины нейтронная сдвиговая вязкость сравнима с электронной (см. Флауэрс и Ито [151]), однако ее учет качественно не изменит наших результатов.

Используя уравнения (4.15), (4.16) и (4.25), а также второй закон термодинамики:  $d\rho = \mu_n dn_n + \mu_p dn_p + \mu_e dn_e + T dS$ , стандартным способом (см., например, Вайнберг [29] или Ландау и Лифшиц [89]) можно получить уравнение непрерывности для энтропии в ядре звезды:

$$(Su^\alpha)_{;\alpha} = (Q_{\text{bulk}} + Q_{\text{shear}} + Q_{\text{cond}} - Q_\nu) / k_B T, \quad (4.29)$$

$$Q_{\text{bulk}} = \delta\mu \Delta\Gamma, \quad Q_{\text{shear}} = (\Delta T_{\text{shear}}^{\alpha\beta})_{;\beta} u_\alpha, \quad Q_{\text{cond}} = (\Delta T_{\text{cond}}^{\alpha\beta})_{;\beta} u_\alpha. \quad (4.30)$$

Здесь  $S$  – объемная плотность энтропии;  $Q_{\text{bulk}}$  – пульсационная энергия, диссипирующая в тепло в единице объема в единицу времени за счет неравновесного модифицированного урка-процесса; этот член можно интерпретировать как вязкую диссипацию за счет эффективной *объемной вязкости*. Как будет видно далее, при  $\delta\mu \ll k_B T$  этот член совпадает с членом, который обычно рассматривается другими авторами (см., например, Соьер [136] или Хэнсел и др. [162]). Слагаемое  $Q_{\text{shear}}$  описывает диссипацию пульсационной энергии в тепло благодаря сдвиговой вязкости. Слагаемое  $Q_{\text{cond}}$  в общем случае отвечает за диффузию тепла внутри нейтронной звезды, а также за диссипацию пульсационной энергии благодаря теплопроводности. Наконец,  $Q_\nu$  – скорость нейтринного энергосвечения. В данной работе мы рассчитали величину  $Q_{\text{cond}}$ , используя невозмущенную метрику (то есть метрику (4.1) с  $\nu = \nu_0$  и  $\lambda = \lambda_0$ ) и пренебрегая изменениями температуры за период колебаний звезды. Результат совпал с аналогичным выражением, получаемым в теории остывания неппульсирующих нейтронных звезд (см., например, Торн [141], Ван Райпер [130]). В условиях сильно вырожденного вещества принятые приближения являются вполне оправданными. Учет затухания пульсаций вследствие теплопроводности произведен Катлером и Линдбломом [71] для более общего случая нерадиальных колебаний. Основным выводом этих авторов заключается в том, что вкладом теплопроводности в диссипацию пульсационной энергии можно пренебречь.

В случае сферически симметричной метрики (4.1) левую часть уравнения (4.29) можно переписать в виде:

$$(Su^\alpha)_{;\alpha} = \left[ \frac{\partial(Se^{\lambda/2})}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 Se^{\lambda/2} \frac{\partial \xi(r, t)}{\partial t} \right) \right] e^{-(\lambda+\nu)/2}. \quad (4.31)$$

В дальнейшем мы будем использовать *изотермическое приближение*, согласно которому внутри звезды температура (с учетом гравитационного красного смещения) постоянна:  $\tilde{T} = Te^{\nu/2} = \text{const}$ . Для остывающей звезды возраста  $t \gtrsim (10 - 50)$  лет такое приближение выполняется очень хорошо (см., например, Яковлев и Петик [183], Яковлев и др. [179]); его использование позволяет сильно упростить расчеты, но не сказывается на основных выводах данной работы.

Принимая во внимание формулу (4.31), записывая уравнение (4.29) в интегральной форме и производя усреднение по периоду колебаний, получим искомое уравнение теплового баланса:

$$\frac{dE_{\text{th}}}{dt} \equiv C_T \frac{d\tilde{T}}{dt} = -L_{\text{phot}} - L_\nu + W_{\text{bulk}} + W_{\text{shear}}, \quad C_T = \int c_T dV, \quad (4.32)$$

$$L_{\text{phot}} = 4\pi R^2 \sigma T_s^4 e^{\nu_0(R)}, \quad L_\nu = \int \bar{Q}_\nu e^{\nu_0} dV, \quad (4.33)$$

$$W_{\text{bulk}} = \int \bar{Q}_{\text{bulk}} e^{\nu_0} dV, \quad W_{\text{shear}} = \int \bar{Q}_{\text{shear}} e^{\nu_0} dV. \quad (4.34)$$

Здесь  $L_{\text{phot}}$  и  $L_\nu$  – фотонная и нейтринная светимости звезды с учетом гравитационного красного смещения;  $W_{\text{bulk}}$  и  $W_{\text{shear}}$  – тепло, выделяемое в единицу времени в звезде за счет объемной и сдвиговой вязкости, соответственно;  $\sigma$  – постоянная Стефана-Больцмана;  $T_s$  – эффективная температура поверхности нейтронной звезды (связь между поверхностной и внутренней температурами обсуждается в обзоре Яковлева и Петика [183], там же можно найти ссылки на оригинальные статьи); верхняя горизонтальная черта означает усреднение по периоду колебаний. При получении уравнения (4.32) мы пренебрегли членами порядка  $\sim T^2 \varepsilon^2$  по сравнению с членами  $\sim T^2$  в левой части равенства. Наличие величины  $Q_{\text{cond}}$  в формуле (4.29) привело к появлению  $L_{\text{phot}}$  в уравнении (4.32).

Тепло, выделяющееся благодаря сдвиговой вязкости, может быть пред-

ставлено в виде:

$$\begin{aligned}\overline{Q}_{\text{shear}} &= \frac{\eta}{3} \frac{e^{-\nu_0}}{r^2} \left\{ -2r \frac{\partial^2 \xi(r, t)}{\partial r \partial t} + 2 \frac{\partial \xi(r, t)}{\partial t} + r \frac{\partial \xi(r, t)}{\partial t} \frac{d\nu_0}{dr} \right\}^2 \\ &= \frac{\eta}{6} \omega_k^2 C_k^2(t) \frac{e^{-\nu_0}}{r^2} \left\{ -2r \frac{d\xi_k}{dr} + 2\xi_k + r\xi_k \frac{d\nu_0}{dr} \right\}^2.\end{aligned}\quad (4.35)$$

Среди нейтринных процессов, вносящих вклад в энергосвечение  $Q_\nu$  (см., например, Яковлев и др. [176]), единственным (и самым мощным) процессом, энергосвечение которого  $Q_{\text{noneq}}$  может сильно меняться за период колебаний звезды, является модифицированный урка-процесс (напомним, что в нашем случае прямой урка-процесс запрещен). Выражение для  $\overline{Q}_{\text{noneq}}$  получается из формулы (4.11) усреднением по периоду пульсаций  $P = 2\pi/\omega_k$  с учетом того, что  $y(r, t) = y_0 \cos(\omega_k t)$ , где  $y_0$  – медленно меняющаяся функция времени:

$$\overline{Q}_{\text{noneq}} = Q_{\text{eq}} \left( 1 + \frac{11010\pi^2 y_0^2}{11513} + \frac{8505\pi^4 y_0^4}{46052} + \frac{525\pi^6 y_0^6}{46052} + \frac{315\pi^8 y_0^8}{1473664} \right), \quad (4.36)$$

$$y_0 = \frac{C_k(t)}{\pi^2 k_B T} \frac{\partial \delta\mu(n_{b0}, x_{e0})}{\partial n_{b0}} n_{b0} \frac{e^{\nu_0/2}}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 e^{-\nu_0/2} \xi_k \right). \quad (4.37)$$

Аналогично, используя формулы (4.10) и (4.24), получим выражение, описывающее нагрев звезды благодаря диссипации пульсационной энергии при отклонениях от бета-равновесия:

$$\overline{Q}_{\text{bulk}} = \frac{14680\pi^2}{11513} Q_{\text{eq}} \left( \frac{y_0^2}{2} + \frac{567\pi^2 y_0^4}{2936} + \frac{105\pi^4 y_0^6}{5872} + \frac{21\pi^6 y_0^8}{46976} \right). \quad (4.38)$$

Аналогичные формулы для неравновесного прямого урка-процесса даны в Приложении 2.

Формулы (4.36) и (4.38) позволяют легко рассчитать скорость нейтринного энергосвечения и вязкой диссипации за счет неравновесных модифицированных урка-процессов при любых колебаниях звезды (подтепловых или надтепловых, но малых, так что  $\varepsilon \ll 1$ ). Характерное значение  $\overline{y}_0$  параметра  $y_0$  в ядре звезды для фундаментальной моды колебаний можно оценить по формуле

$$\overline{y}_0 \sim 100 \varepsilon C_k(t) / T_9. \quad (4.39)$$

Итак, мы вывели уравнение тепловой эволюции колеблющейся нейтронной звезды. Это уравнение зависит от текущей амплитуды пульсаций  $C_k(t)$ , а следовательно от пульсационной энергии  $E_{\text{puls}}(t)$  (см. формулу (4.7)). Теперь получим уравнение, описывающее эволюцию пульсационной энергии звезды. В принципе оно может быть выведено из уравнения на собственные частоты (формула (59) статьи Чандрасекара [166]), если учесть в нем диссипативные члены и рассматривать их как малое возмущение (в общем случае нелинейное по  $\xi_k$ ). Такой вывод был проделан автором, но здесь мы дадим значительно более простой вывод, следующий из закона сохранения энергии. Для этого заметим, что пульсационная энергия диссипирует за счет объемной и сдвиговой вязкости. Вся эта энергия идет на нагрев вещества. Соответствующие члены в уравнении теплового баланса (4.32) уже получены. Эти же члены (с обратным знаком) должны входить в уравнение затухания пульсаций, которое поэтому может быть записано в виде:

$$\frac{dE_{\text{puls}}}{dt} = -W_{\text{bulk}} - W_{\text{shear}}. \quad (4.40)$$

Система уравнений (4.32) и (4.40) позволяет получать самосогласованные решения для амплитуды колебаний  $C_k$  и температуры  $\tilde{T}$  как функции времени.

Аналогичные уравнения были сформулированы, проанализированы и решены численно Финци и Вольфом [149] с использованием нескольких упрощающих предположений. В частности, авторы пренебрегли затуханием пульсаций благодаря сдвиговой вязкости ( $W_{\text{shear}} = 0$ ). Они использовали приближенные выражения для величин  $L_\nu$  и  $W_{\text{bulk}}$  (см. выше) и пренебрегли эффектами общей теории относительности. Кроме того, они использовали упрощенные модели нейтронных звезд и звездных пульсаций. Тем не менее, подход этих авторов оказался достаточным для того, чтобы качественно понять, как неравновесный модифицированный урка-процесс влияет на тепловую эволюцию пульсирующих нейтронных звезд. Мы расширили и обобщили анализ Финци и Вольфа [149], используя более современные данные о свойствах вещества нейтронных звезд и учитывая должным образом эффекты сдвиговой вязкости и общей теории относительности.

В общем виде можно записать:

$$\begin{aligned}
C_T &= 10^{39} a_C \tilde{T}_9 \text{ erg K}^{-1}, & L_{\nu 0} &= 10^{40} a_L \tilde{T}_9^8 \text{ erg s}^{-1}, \\
E_{\text{puls}} &= 10^{53} a_P \omega_4^2 \varepsilon^2 C_k^2 \text{ erg}, \\
L_\nu &= L_{\nu 0} (1 + a_1 \bar{y}_0^2 + a_2 \bar{y}_0^4 + a_3 \bar{y}_0^6 + a_4 \bar{y}_0^8), & W_{\text{shear}} &= 10^{38} a_S \omega_4^2 \bar{y}_0^2 \text{ erg s}^{-1}, \\
W_{\text{bulk}} &= L_{\nu 0} \left( \frac{2}{3} a_1 \bar{y}_0^2 + \frac{4}{3} a_2 \bar{y}_0^4 + 2a_3 \bar{y}_0^6 + \frac{8}{3} a_4 \bar{y}_0^8 \right), & \bar{y}_0 &\equiv 10^2 \frac{\varepsilon C_k}{\tilde{T}_9}. \quad (4.41)
\end{aligned}$$

Здесь  $\tilde{T}_9 = \tilde{T}/(10^9 \text{ K})$ ;  $L_{\nu 0}$  – нейтринная светимость неппульсирующей звезды;  $a_C, a_L, a_P, a_S, a_1, \dots, a_4$  – безразмерные коэффициенты, зависящие от модели звезды и от моды колебаний. Для используемой нами модели звезды ( $M = 1.4 M_\odot$ , уравнение состояния Гейзельберга и Хйорта-Йенсена [32]) и фундаментальной моды колебаний получим:  $a_C = 1.88, a_L = 5.34, a_P = 1.81, a_S = 4.75, a_1 = 9.18, a_2 = 20.0, a_3 = 15.0, a_4 = 3.61$ .

#### 4.5 Аналитические решения и предельные случаи

Прежде чем приводить численное решение системы уравнений (4.32) и (4.40), укажем некоторые общие свойства решений и рассмотрим предельные случаи подтепловых и надтепловых колебаний. Все оценки будут приведены для фундаментальной моды колебаний и выбранной модели звезды ( $M = 1.4 M_\odot$ ).

Уравнение (4.40) описывает затухание колебаний со временем под действием объемной и сдвиговой вязкости. В данной постановке задачи возможная раскачка колебаний под действием каких-либо неустойчивостей не происходит. В то же время уравнение теплового баланса (4.32) допускает как остывание звезды (при  $L_\nu + L_{\text{phot}} > W_{\text{bulk}} + W_{\text{shear}}$ ), так и нагрев за счет вязкой диссипации энергии колебаний (при  $L_\nu + L_{\text{phot}} < W_{\text{bulk}} + W_{\text{shear}}$ ).

Можно ожидать качественно разных решений в подтепловом режиме колебаний ( $\bar{y}_0 \ll 1$ ) и в надтепловом режиме ( $\bar{y}_0 \gg 1$ ). При этом в подтепловом режиме  $E_{\text{puls}} \ll E_{\text{th}}$ , а в надтепловом  $E_{\text{puls}} \gg E_{\text{th}}$ .

### 4.5.1 Модифицированный урка-процесс: универсальный нелинейный режим звездной эволюции

В достаточно нагретой звезде  $L_{\text{phot}} \ll L_\nu$  и  $W_{\text{shear}} \ll W_{\text{bulk}}$ . В этом случае эволюция колебаний и тепловая эволюция звезды полностью определяются неравновесными бета-процессами. Основные свойства решений в этом режиме были проанализированы Финци и Вольфом [149]. Здесь мы представим этот анализ, используя более аккуратный подход (см. выше).

Рассмотрим, как с течением времени изменяются функции  $\tilde{T}(t)$  и  $\bar{y}_0(t)$ . Пренебрегая величинами  $L_{\text{phot}}$  и  $W_{\text{shear}}$ , можно переписать уравнения (4.32) и (4.40) в виде:

$$\frac{2E_{\text{th}}}{\bar{y}_0} \frac{d\bar{y}_0}{dt} = L_\nu - W_{\text{bulk}} \left( 1 + \frac{E_{\text{th}}}{E_{\text{puls}}} \right) = \tilde{T}^8 A(\bar{y}_0), \quad (4.42)$$

$$\frac{2E_{\text{th}}}{\tilde{T}} \frac{d\tilde{T}}{dt} = -L_\nu + W_{\text{bulk}} = \tilde{T}^8 B(\bar{y}_0), \quad (4.43)$$

где  $E_{\text{th}}/E_{\text{puls}} = a_C/(20\bar{y}_0^2 a_P \omega_4^2)$ ; функции  $A(\bar{y}_0)$  и  $B(\bar{y}_0)$  не зависят от  $\tilde{T}$ . Конкретные выражения для этих функций могут быть легко получены из выражений (4.41). Из формул (4.42) и (4.43) немедленно следует:  $d \ln \bar{y}_0 / d \ln \tilde{T} = A(\bar{y}_0)/B(\bar{y}_0)$ . Это дает возможность (в принципе) получить соотношение между параметрами  $\bar{y}_0$  и  $\tilde{T}$  в интегральной форме.

Уравнения (4.42) и (4.43) имеют два интересных частных решения. Первое решение очевидно и отсылает нас к остыванию обычной неппульсирующей [ $\bar{y}_0(t) \equiv 0$ ] нейтронной звезды. В этом случае:

$$\tilde{T}(t) = \tilde{T}(0) / \left( 1 + 6\beta_0 \tilde{T}_9^6(0) t \right)^{1/6}, \quad (4.44)$$

где  $\beta_0 = a_L/(10^8 a_C)$ . Для выбранной модели нейтронной звезды величина  $\beta_0$  приближенно равна:  $\beta_0 \approx 1/(1.12 \text{ yr})$ .

Второе решение (Финци и Вольф [149]) описывает режим, который мы назовем *универсальным нелинейным режимом звездной эволюции*. Этот режим реализуется, если начальное значение параметра  $\bar{y}_0(0)$  удовлетворяет условию:

$$\frac{L_\nu}{W_{\text{bulk}}} = 1 + \frac{E_{\text{th}}}{E_{\text{puls}}} = 1 + \frac{a_C}{20 \bar{y}_0^2 a_P \omega_4^2}, \quad (4.45)$$

при котором  $A(\bar{y}_0) = 0$  и  $d\bar{y}(t)/dt = 0$ . В этом случае параметр  $\bar{y}_0(t)$  *остаётся неизменным* во времени и равным некоей постоянной величине  $\bar{y}_{0L}$  до тех пор, пока эволюция звезды определяется только неравновесными бета-процессами. Для выбранной модели нейтронной звезды эта постоянная равна:  $\bar{y}_{0L} \approx 0.607$ .

Из уравнения (4.32) находим:

$$\tilde{T}(t) = \tilde{T}(0) / \left(1 + 6\beta\tilde{T}_9^6(0)t\right)^{1/6}, \quad (4.46)$$

$$C_k(t) = \tilde{T}_9(t)\bar{y}_{0L}/10^2\varepsilon, \quad (4.47)$$

где  $\beta = a_L(L_\nu - W_{\text{bulk}})/(10^8 a_C L_{\nu 0})$  ( $\approx 1/(3.05 \text{ yr})$  для нашей модели). Таким образом, внутренняя температура звезды  $\tilde{T}(t)$  и пульсационная амплитуда  $C_k(t)$  одновременно уменьшаются со временем, удерживая звезду в промежуточном между подтепловым и надтепловым режиме пульсаций. Подчеркнем, что уменьшение величин  $\tilde{T}(t)$  и  $C_k(t)$  при этом подчиняется степенному (а не экспоненциальному) закону.

Тепловая эволюция нейтронных звезд в двух рассмотренных выше случаях чрезвычайно схожа. Если звезда была рождена достаточно горячей [ $\tilde{T}(0) \gtrsim 10^9$  K], то через несколько лет после рождения ее начальная температура "забывается" (перестает влиять на дальнейшую эволюцию звезды). Для неппульсирующих звезд из уравнения (4.44) при этом получаем  $\tilde{T}_9^{(1)}(t) \approx (6\beta_0 t)^{-1/6}$ , а для пульсирующей звезды из уравнения (4.46) следует:  $\tilde{T}_9^{(2)}(t) \approx (6\beta t)^{-1/6}$ . Таким образом, пульсирующие звезды являются чуть более горячими,  $\tilde{T}^{(2)}(t)/\tilde{T}^{(1)}(t) = (\beta_0/\beta)^{1/6}$  ( $\approx 1.18$  для нашей модели).

Принимая во внимание два изученных выше решения, становится ясным поведение других решений уравнений (4.42) и (4.43). Если  $\bar{y}_0(0) > \bar{y}_{0L}$ , то имеем  $A(\bar{y}_0(0)) < 0$  и функция  $\bar{y}_0(t)$  стремится к постоянной  $\bar{y}_{0L}$  сверху. В противоположном случае, когда  $\bar{y}_0(0) < \bar{y}_{0L}$ , получаем  $A(\bar{y}_0(0)) > 0$  и функция  $\bar{y}_0(t)$  стремится к постоянной  $\bar{y}_{0L}$  снизу. После того, как функция  $\bar{y}_0(t)$  приблизится к постоянной  $\bar{y}_{0L}$ , эволюция звезды станет приближенно описываться решением, задаваемым формулами (4.46) и (4.47). Таким образом, это предельное решение описывает *универсальное асимптотическое поведение всех пульсирующих нейтронных звезд*.



#### 4.5.2 Затухание колебаний за счет сдвиговой вязкости

Можно ожидать качественно разных решений при затухании колебаний под действием объемной вязкости ( $W_{\text{bulk}} \gg W_{\text{shear}}$ , нагретая звезда) и сдвиговой вязкости ( $W_{\text{shear}} \gg W_{\text{bulk}}$ , холодная звезда). Пользуясь формулами (4.41), можно показать, что температура  $T_{\text{visc}}$ , разделяющая эти два режима (отвечающая условию  $W_{\text{bulk}} \sim W_{\text{shear}}$ ), примерно равна  $T_{\text{visc}} \sim 7 \times 10^8 / (1 + \bar{y}_0^2)^{3/8}$  К. В режиме затухания под действием сдвиговой вязкости ( $T \ll T_{\text{visc}}$ ) вне зависимости от величины  $\bar{y}_0$  из (4.40) следует линейное уравнение для  $C_k(t)$ :

$$\frac{dC_k(t)}{dt} = -\frac{\alpha_{\text{shear}}}{2\tilde{T}_9^2} C_k(t), \quad (4.48)$$

где  $\alpha_{\text{shear}} \approx 3 \times 10^{-11} \text{ с}^{-1} \sim 1/(1000 \text{ лет})$  – постоянный коэффициент. Решение этого уравнения описывает экспоненциальное затухание колебаний, не зависящее явно от  $\bar{y}_0$ :

$$C_k(t) = C_k(t_0) \exp\left(-\frac{\alpha_{\text{shear}}}{2} \int_{t_0}^t \frac{dt'}{\tilde{T}_9^2(t')}\right). \quad (4.49)$$

#### 4.5.3 Подтепловой режим колебаний звезды

В данном режиме ( $y_0 \ll 1$ ) формула (4.38) может быть упрощена:

$$\begin{aligned} \bar{Q}_{\text{bulk}} &= \frac{14680\pi^2}{11513} Q_{\text{eq}} \frac{y_0^2}{2} \\ &= \zeta \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 e^{-\nu_0/2} \frac{\partial \xi(r, t)}{\partial t} \right) \right]^2 = \zeta \overline{(u_{;\alpha}^\alpha)^2}, \end{aligned} \quad (4.50)$$

$$\zeta = \frac{14680}{11513\pi^2} \frac{Q_{\text{eq}}}{(k_{\text{B}}T)^2} \frac{n_{\text{b}0}^2}{(\omega_k e^{-\nu_0/2})^2} \left[ \frac{\partial \delta \mu(n_{\text{b}0}, x_{\text{e}0})}{\partial n_{\text{b}0}} \right]^2. \quad (4.51)$$

Величину  $\zeta$  можно интерпретировать как коэффициент объемной вязкости. Формула (4.51) совпадает с аналогичным выражением, полученным Сойером [136] и Хэнселом и др. [162]. Если температура не меняется за время затухания пульсаций, то из уравнений (4.7) и (4.40) следует обычно рассматриваемое экспоненциальное уменьшение амплитуды колебаний  $C_k(t)$  (см., например, Катлер и др. [72]).

Согласно (4.41), в подтепловом режиме  $L_\nu \approx L_{\nu 0} \gg W_{\text{bulk}}$ , то есть колебания звезды не влияют на нейтринную светимость, а диссипация энергии колебаний за счет объемной вязкости не способна заметно нагреть звезду. Диссипация энергии колебаний за счет сдвиговой вязкости тоже обычно слаба ( $W_{\text{shear}} \ll L_{\nu 0}$ ). Поэтому колебания звезды фактически не меняют уравнения теплового баланса (4.32) и тепловую эволюцию звезды. На нейтринной стадии охлаждения звезды (когда  $L_{\nu 0} \gg L_{\text{phot}}$ , что выполняется при  $t \lesssim 10^5$  лет) получаем хорошо известный закон охлаждения (4.44) несверхтекучих нейтронных звезд, остывающих благодаря модифицированному урка-процессу. Его можно переписать в виде (см., например, Яковлев и Петик [183]):

$$t = C_T \tilde{T} / (6L_{\nu 0}) \sim 1 \text{ yr} / \tilde{T}_9^6. \quad (4.52)$$

Это время можно рассматривать как характерное время остывания звезды  $t_{\text{cool}}$  с внутренней температурой  $\tilde{T}$ . При этом в достаточно горячей звезде, в которой  $W_{\text{bulk}} \gg W_{\text{shear}}$  ( $T \gg T_{\text{visc}}$ , этот случай рассмотрен в разделе 4.5.1), уравнение (4.40) дает характерное время затухания колебаний

$$t_{\text{puls}} \sim E_{\text{puls}} / W_{\text{bulk}} \sim t_{\text{cool}}. \quad (4.53)$$

Это означает, что внутренняя температура звезды  $\tilde{T}$  и среднее по звезде рассогласование химических потенциалов  $\delta\bar{\mu}$  уменьшаются с примерно одинаковым характерным временем  $t_{\text{cool}}$  (см., например, Яковлев и др. [179]). При этом параметр  $\bar{y}_0 \propto \delta\bar{\mu} / \tilde{T}$  (“уровень” колебаний по отношению к тепловому) стремится к своему предельному значению  $\bar{y}_{0L}$  (см. раздел 4.5.1). Затухание подтепловых колебаний оказывается степенным, а не экспоненциальным, как было бы без учета тепловой эволюции звезды. Степенное затухание обязано сильной зависимости скорости вязкого затухания от температуры ( $W_{\text{bulk}} \propto \tilde{T}^6$ ).

В более холодной звезде ( $\tilde{T} \ll T_{\text{visc}}$ ,  $W_{\text{shear}} \gg W_{\text{bulk}}$ ) затухание подтепловых колебаний обусловлено сдвиговой вязкостью и происходит в соответствии с формулой (4.49), значительно более резко (экспоненциально); уровень колебаний  $\bar{y}_0$  должен быстро падать.

#### 4.5.4 Надтепловой режим колебаний звезды

В надтепловом режиме величина  $\overline{Q}_{\text{bulk}}$ , вообще говоря, не сводится к выражению типа (4.50). Поэтому строго ввести коэффициент объемной вязкости  $\zeta$  не удастся. Это не мешает корректно описывать скорость диссипации энергии колебаний за счет модифицированного урка-процесса формулой (4.38). Тем не менее, по крайней мере для радиальных надтепловых колебаний, величину  $\overline{Q}_{\text{bulk}}$  можно по-прежнему формально описывать формулой (4.50) с эффективным коэффициентом объемной вязкости  $\zeta$ , даваемым формулой (4.51) с дополнительным множителем  $\overline{Q}_{\text{bulk}}/\overline{Q}_{\text{bulk}}(\overline{y}_0 \rightarrow 0)$ . В надтепловом режиме такая эффективная объемная вязкость и скорость вязкой диссипации энергии колебаний оказываются значительно больше, чем в подтепловом режиме. Этот эффект указан Хэнселом и др. [163]. Однако при оценке объемной вязкости в надтепловом режиме авторы допустили неточность. В их формулах (13)–(15) для эффективной объемной вязкости следует вставить дополнительный множитель  $\sim (1 + \overline{y}_0^2)$ . Указанная неточность качественно не меняет основных результатов Хэнсела и др. [163]. Однако, как будет показано ниже, при рассмотрении затухания колебаний следует учитывать тепловую эволюцию звезды (что ранее не делалось). Кроме того, отметим, что в надтепловом режиме формула (16) Хэнсела и др. [163] дает характерные времена *неэкспоненциального* затухания колебаний.

В надтепловом режиме ( $E_{\text{puls}} \gg E_{\text{th}}$ ,  $\overline{y}_0 \gg 1$ ) и при условии  $W_{\text{bulk}} \gg W_{\text{shear}}$  ( $\tilde{T} \gg T_{\text{visc}}$ ) пульсационное уравнение (4.40) может быть переписано в виде:

$$\frac{dC_k^2(t)}{dt} = -\alpha_{\text{bulk}} C_k^8(t), \quad (4.54)$$

где  $\alpha_{\text{bulk}} \approx 3 \times 10^4 \varepsilon^6 / \omega_4^2 \text{ c}^{-1}$  – постоянный коэффициент. Отсюда при  $C_k(0) = 1$  получаем:

$$C_k(t) \approx (1 + 3\alpha_{\text{bulk}} t)^{-1/6}. \quad (4.55)$$

Это решение описывает медленное (степенное) падение амплитуды колебаний  $\sim t^{-1/6}$  с характерным временем  $1/(3\alpha_{\text{bulk}})$ . В данном режиме нагрев звезды всегда преобладает над охлаждением, причем  $W_{\text{bulk}} \approx (8/3) L_\nu \propto \overline{\delta\mu}^8$  и скорость нагрева почти не зависит от температуры (а определяется расогласованием химических потенциалов  $\overline{\delta\mu}$ ). Этот результат был получен

Финци и Вольфом [149]. Степенное уменьшение  $C_k(t)$  обусловлено сильной зависимостью  $W_{\text{bulk}}$  от  $\overline{\delta\mu}$  (играющей ту же роль, что и сильная зависимость от  $T$  в подтепловом режиме). Уровень колебаний по отношению к тепловому должен понижаться и звезда должна эволюционировать к подтепловому режиму ( $\overline{y}_0 \rightarrow \overline{y}_{0L}$ ; раздел 4.5.1).

В достаточно холодной звезде затухание колебаний за счет сдвиговой вязкости преобладает над затуханием за счет объемной вязкости ( $W_{\text{shear}} \gtrsim W_{\text{bulk}}$ ,  $\tilde{T} \lesssim T_{\text{visc}}$ ). Такое затухание должно происходить экспоненциально, в соответствии с (4.48), и звезда должна быстро эволюционировать к подтепловому режиму.

## 4.6 Результаты моделирования

В общем случае система уравнений (4.32) и (4.40) не имеет аналитического решения, поэтому ее приходится решать численно. Для этого мы модифицировали изотермическую версию нашего кода остывания нейтронных звезд включив в него блок, решающий уравнение затухания колебаний (4.40). В результате наша программа позволяет строить не только зависимости поверхностной температуры звезды  $T_s^\infty$  (с учетом гравитационного красного смещения) от времени  $t$ , но и зависимости  $C_k(t)$ . Все результаты в этом разделе приведены для фундаментальной моды радиальных колебаний. Расчеты для более высоких радиальных мод не приведут к качественно новым выводам.

На левой части рисунка 4.2 изображена тепловая эволюция звезды для трех моделей, отличающихся начальной внутренней температурой  $\tilde{T}(0) = \tilde{T}_0$  и начальной относительной амплитудой колебаний  $\varepsilon$  (см. формулу (4.3)). Справа для тех же моделей построены зависимости  $C_k(t)$ . Точками на левой части рисунка обозначена кривая остывания неппульсирующей звезды в изотермическом приближении. Кружочек – результаты наблюдений пульсара в созвездии Парусов (Vela) [см. раздел 1.2.1].

Сплошной линией на обеих частях рисунка обозначена модель с  $\tilde{T}_0 = 10^{10}$  К и  $\varepsilon = 0.01$ . Это модель звезды, которая родилась горячей и сильно колеблющейся. Начальная энергия колебаний примерно в два раза меньше

начальной тепловой энергии звезды. Исходно звезда находится в промежуточном (между надтепловым и подтепловым) режиме пульсаций, при котором  $\overline{\delta\mu} \sim k_B T$ . Нагрев звезды из-за вязкой диссипации энергии колебаний происходит слабее, чем нейтринное охлаждение под действием неравновесного модифицированного урка-процесса; поэтому звезда остывает. Основной вклад в диссипацию колебаний в начале остывания дает объемная вязкость. Максимальные отличия температуры поверхности такой звезды от температуры поверхности неп пульсирующей звезды имеют место при  $t \lesssim 1000$  лет. Все это время  $\overline{\delta\mu}$  остается порядка  $k_B T$  ( $\overline{y}_0 \approx \overline{y}_{0L}$ ). При  $t \gtrsim 1000$  лет затухание колебаний начинает определяться сдвиговой вязкостью (которая гораздо слабее зависит от температуры, чем объемная вязкость). Это приводит к быстрому (экспоненциальному) затуханию колебаний в подтепловом режиме ( $E_{\text{puls}}/E_{\text{th}} \ll 1$ ; правая часть рисунка 4.2).

Короткими штрихами на рисунке 4.2 показана модель исходно холодной звезды с  $\tilde{T}_0 = 10^6$  К и  $\varepsilon = 0.01$ . Начальное отношение энергии колебаний и тепловой энергии составляет  $E_{\text{puls}0}/E_{\text{th}0} \sim 5 \times 10^7$ , то есть звезда пульсирует в сильно надтепловом режиме. Из формул (4.41) следует, что при столь низких температурах  $W_{\text{bulk}} \ll W_{\text{shear}}$  и звезда сначала разогревается за счет сдвиговой вязкости. Нагрев звезды благодаря объемной вязкости начинает преобладать лишь при  $\tilde{T} \gtrsim 5 \times 10^8$  К. Разогревшись до температуры  $\tilde{T} \approx 1.7 \times 10^9$  К за время  $t \sim 1$  месяца, звезда переходит в промежуточный режим пульсаций ( $\overline{\delta\mu} \sim k_B T$ ) и начинает остывать. При  $t \gtrsim 10$  лет звезда эволюционирует по тому же ‘универсальному’ сценарию ( $\overline{y}_0 \approx \overline{y}_{0L}$ ), что и для первой модели.

Длинными штрихами изображены результаты расчетов при тех же начальных условиях, но при ‘наивном’ пренебрежении нелинейными эффектами в неравновесных бета-процессах. А именно, нейтринная светимость положена равной  $L_\nu = L_{\nu 0}$ , а затухание колебаний за счет объемной вязкости рассчитано по формулам (4.50) и (4.51). Видно, что такое приближение ведет к качественно неверным результатам. Вязкий нагрев звезды в течение первого года после возбуждения колебаний оказывается гораздо слабее, чем с учетом нелинейных эффектов, и медленнее разогревает звезду. Нейтринная

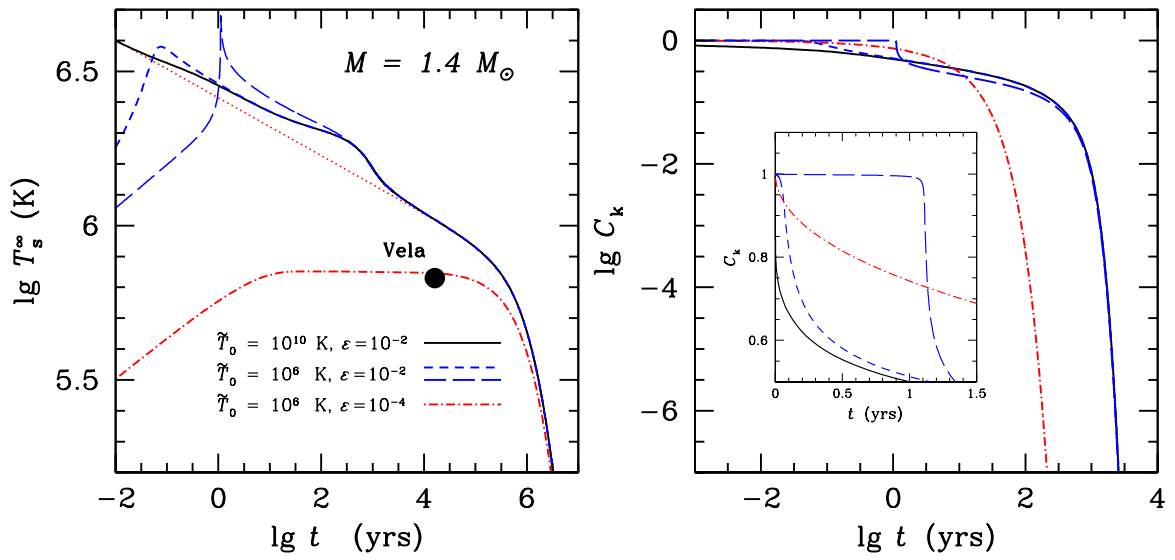


Рис. 4.2: Зависимости температуры поверхности (слева) и амплитуды пульсаций (справа) от времени для трех начальных условий:  $\tilde{T}_0 = 10^{10}$  К,  $\varepsilon = 0.01$  (сплошные линии);  $\tilde{T}_0 = 10^6$  К,  $\varepsilon = 0.01$  (штрихи);  $\tilde{T}_0 = 10^6$  К,  $\varepsilon = 0.0001$  (штрих-пунктир). Короткие штрихи – самосогласованный расчет; длинные штрихи – расчет в пренебрежении нелинейными эффектами отклонения от бета-равновесия (см. текст). Точками (слева) показано остывание неп пульсирующей звезды в изотермическом приближении. Кружком обозначены результаты наблюдений пульсара в созвездии Парусов (Vela).

светимость звезды оказывается тоже слабее, вследствие чего звезда разогревается до более высоких температур. Слабое затухание за счет объемной вязкости фактически не ослабляет амплитуду колебаний звезды в течение первого года.

Штрихпунктирные линии на рисунке 4.2 отвечают модели холодной звезды с  $\tilde{T}_0 = 10^6$  К и  $\varepsilon = 0.0001$ . Начальное отношение пульсационной и тепловой энергий звезды примерно равно  $E_{\text{puls0}}/E_{\text{th0}} \sim 5 \times 10^3$ , то есть исходно звезда находится в надтепловом режиме. Тем не менее энергии колебаний ( $E_{\text{puls0}} \sim 5 \times 10^{45}$  эрг) недостаточно, чтобы разогреть звезду до температур, при которых затухание колебаний начинает определяться объемной вязкостью. Поэтому энергия колебаний диссипирует благодаря сдвиговой вязкости. Затухание колебаний происходит приблизительно за 100 лет (см. правую

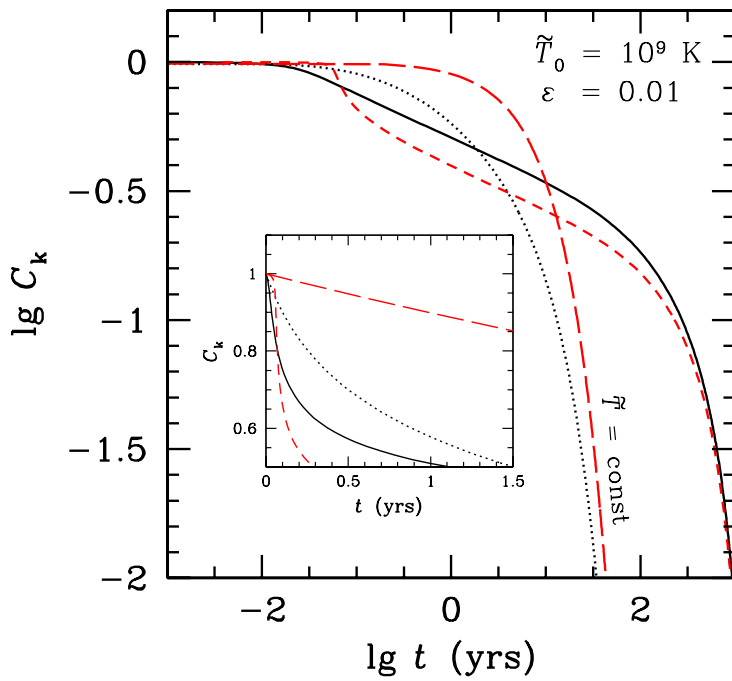


Рис. 4.3: Зависимость амплитуды пульсаций от времени для модели звезды с начальными условиями  $\tilde{T}_0 = 10^9$  K,  $\varepsilon = 0.01$ . Сплошная линия – само согласованный расчет с учетом тепловой эволюции звезды и нелинейных эффектов при отклонении от бета-равновесия (см. текст); точки – то же, но температура фиксирована; короткие штрихи – то же, что и сплошная линия, но нелинейные эффекты не учитываются; длинные штрихи – нелинейные эффекты не учитываются, температура фиксирована.

часть рисунка 4.2). Остывание звезды при  $t \gtrsim 100$  лет идет за счет излучения фотонов. Из левой части рисунка 4.2 видно, что данная модель может в принципе объяснить поверхностную температуру нейтронной звезды, имеющей примерно ту же тепловую рентгеновскую светимость, что и пульсар в созвездии Парусов, но другую историю. Например, это может быть старая (остывшая) изолированная нейтронная звезда, в которой по какой-либо причине возбуждены радиальные колебания. За время порядка 10 лет после возбуждения колебаний звезда разогреется до температуры пульсара в созвездии Парусов. Через 100 лет колебания затухнут, но тепловое состояние звезды останется неизменным примерно 100 тысяч лет, и лишь потом звезда начнет заметно остывать. Подчеркнем, что результаты практически

не изменятся, если в качестве  $\tilde{T}_0$  взять более низкую температуру, например  $\tilde{T}_0 = 10^4$  К. Звезда со столь низкой температурой все равно в течение года разогреется до поверхностной температуры  $T_s^\infty \sim 7 \times 10^5$  К и станет светить в мягком рентгене.

Во всех рассмотренных примерах для правильного расчета затухания колебаний важно учитывать тепловую эволюцию звезды. Эволюционные эффекты особенно важны в режиме, когда затухание колебаний определяется неравновесными бета-процессами. Эти эффекты относительно слабы лишь в подтепловом режиме и при условии, что затухание колебаний определяется сдвиговой вязкостью.

Сделанные утверждения проиллюстрированы также на рисунке 4.3. Рисунок показывает затухание колебаний звезды с начальной внутренней температурой  $\tilde{T}(0) = 10^9$  К и начальной относительной амплитудой колебаний  $\varepsilon = 0.01$ . Начальное отношение энергии колебаний и тепловой энергии составляет  $E_{\text{puls0}}/E_{\text{th0}} \sim 50$ , то есть звезда колеблется в слабо надтепловом режиме. Сплошная линия получена в результате самосогласованного решения уравнения тепловой эволюции и уравнения затухания колебаний. Колебания затухают по степенному закону примерно 100 лет. Далее затухание определяется сдвиговой вязкостью и происходит экспоненциально; колебания полностью затухают примерно через 1000 лет. Точечная линия получена путем решения уравнения затухания колебаний без учета тепловой эволюции звезды (при постоянной внутренней температуре  $\tilde{T} = \tilde{T}(0)$ ). В этом случае колебания затухают сперва за счет объемной, а потом за счет сдвиговой вязкости за  $\sim 30$  лет. Короткими штрихами показаны результаты совместного расчета тепловой эволюции и затухания, но в пренебрежении нелинейными эффектами в неравновесных бета-процессах. Примерно 100 лет колебания затухают за счет объемной вязкости по степенному закону, но медленнее, чем с учетом нелинейных эффектов. Далее становится существенной сдвиговая вязкость. Затухание приобретает экспоненциальный характер и происходит почти так же, как и с учетом нелинейных эффектов. Наконец, длинные штрихи показывают результаты расчетов без учета тепловой эволюции и нелинейных эффектов. Как и с учетом нелинейных эффектов (точечная



линия), затухание является резким (экспоненциальным) и длится примерно 30 лет, но происходит все же медленнее (линия из длинных штрихов расположена выше точечной линии).

#### 4.7 Основные результаты четвертой главы

Обобщая и уточняя анализ Финци и Вольфа [149], мы рассмотрели тепловую эволюцию несверхтекучей нейтронной звезды, совершающей малые радиальные колебания. Мы получили связанную систему уравнений тепловой эволюции и затухания колебаний звезды с учетом эффектов общей теории относительности. Мы рассчитали нейтринную светимость звезды и скорость диссипации энергии колебаний в ядре звезды (под действием объемной вязкости) за счет неравновесного модифицированного урка-процесса с учетом нелинейных отклонений от равновесия. Мы учли также диссипацию колебаний под действием сдвиговой вязкости и нагрев звезды благодаря диссипации энергии колебаний. Получены аналитические и численные решения системы уравнений, описывающих эволюцию нейтронной звезды с нуклонным ядром, в котором запрещен прямой урка-процесс.

Мы показали, что эволюция колеблющейся звезды существенно зависит от степени нелинейности неравновесного модифицированного урка-процесса и от механизма вязкого затухания (объемная или сдвиговая вязкость). В нелинейном режиме звезда может сильно разогреваться за счет диссипации энергии колебаний, а в линейном режиме звезда всегда охлаждается. Затухание колебаний достаточно нагретой звезды происходит под действием объемной вязкости (в линейном или нелинейном режимах) и идет достаточно медленно (по степенному закону). Затухание колебаний более холодной звезды происходит под действием сдвиговой вязкости гораздо более резко (экспоненциально). Характерные времена затухания колебаний фундаментальной моды не превосходят 100–1000 лет.

Наше рассмотрение является упрощенным. Так, объемная вязкость в нуклонном ядре звезды, где разрешен прямой урка-процесс, или в ядре звезды, содержащем гипероны или кварки, оказывается на много порядков выше, чем в рассмотренном нами случае (см., например, работу Хэнсела и др. [163]

и приведенные там ссылки). Результаты могут также сильно измениться при наличии сверхтекучести в ядре звезды. Сверхтекучесть кардинально влияет на скорости реакций в плотном веществе и, как следствие, на кинетические свойства вещества, включая вязкость. Наконец, гораздо интереснее было бы рассмотреть другие типы колебаний нейтронных звезд, прежде всего  $r$ -моды, которые раскачиваются благодаря излучению гравитационных волн (см., например, Андерссон и Коккотас [4]) и могут быть в принципе зарегистрированы гравитационными детекторами нового поколения.

## ГЛАВА 5

### МАТРИЦА СВЕРХТЕКУЧИХ ПЛОТНОСТЕЙ НЕЙТРОН-ПРОТОННОЙ СМЕСИ ПРИ КОНЕЧНЫХ ТЕМПЕРАТУРАХ

#### 5.1 Введение к главе 5

Как известно, в литературе существует большое количество различных моделей спаривания нуклонов, предсказания которых сильно разнятся между собой (ссылки на оригинальную литературу даны, например, в обзоре Яковлева и др. [176], Ломбардо и Шульце [102]). Разные авторы приводят разные зависимости критической температуры  $T_{\text{сн}}(\rho)$  и  $T_{\text{ср}}(\rho)$  сверхтекучести нейтронов и протонов от плотности вещества  $\rho$ . Кроме того, не ясно, какова проекция полного момента нейтронной пары на ось квантования  $|m_J| = 0, 1$ , или 2 (см. главу 1). Возможно, что минимуму свободной энергии соответствует суперпозиция состояний с разными  $|m_J|$  (см. Амундсен и Остгаард [3]).

Несмотря на имеющиеся неопределенности в теории, ясно, что сверхтекучесть сильно влияет на эволюцию нейтронных звезд, например на остывание (см., например, обзор Яковлева и Петика [183]), на пульсации нейтронных звезд (см., например, Менделл [109], Менделл [110], Линдблом и Менделл [99], Андерссон и Комер [5], Андерссон и др. [7], Прикс и др. [127]), а также, возможно, определяет свои периоды пульсаров (см. Альпар и др. [1], Андерссон и др. [9]).

Гидродинамика сверхтекучей жидкости была сформулирована Халатниковым [153] на основе двухжидкостной модели, предложенной Тиссой [140] и в завершенной форме Ландау [86, 87]. В основе двухжидкостной модели лежит предположение о существовании двух независимых полей скоростей: "нормальной" скорости тепловых возбуждений  $\mathbf{V}_{\text{ср}}$  и "сверхтекучей" скорости  $\mathbf{V}_s$ , каждая из которых переносит свою определенную часть жидкости,

так что плотность тока массы  $\mathbf{j}$  равна:

$$\mathbf{j} = (\rho - \rho_s) \mathbf{V}_{\text{qp}} + \rho_s \mathbf{V}_s, \quad (5.1)$$

где  $\rho_s$  – сверхтекучая плотность, то есть плотность сверхтекучей части жидкости. Сверхтекучая компонента не взаимодействует с нормальной частью жидкости и с другими телами, двигаясь независимо от них и не испытывая никакого трения. Нормальная компонента ведет себя как обычная жидкость. Уравнения гидродинамики в этом случае (помимо законов сохранения энергии и импульса, а так же уравнений непрерывности для вещества и энтропии) включают в себя уравнение движения сверхтекучей компоненты (см., например, Халатников [156], Путтерман [128], Ландау и Лифшиц [89]).

Для изучения динамических явлений в сверхтекучих нейтронных звездах гидродинамики, описывающей жидкость, состоящую из частиц одного сорта, явно недостаточно. В ядрах нейтронных звезд мы имеем дело с частицами как минимум трех сортов (нейтроны, протоны и электроны), причем нейтроны и протоны могут быть сверхтекучими. Обобщение гидродинамики сверхтекучей жидкости на случай сверхтекучих смесей было произведено Архиповым и Халатниковым [13] и Халатниковым [154] и уточнено в работе Андреева и Башкина [10].

Одним из основных элементов гидродинамики и кинетики сверхтекучих смесей является матрица сверхтекучих плотностей  $\rho_{\alpha\alpha'}$ . В дальнейшем для простоты будем предполагать, что единственными барионами в ядре нейтронной звезды являются нейтроны и протоны. Тогда матрица  $\rho_{\alpha\alpha'}$  может быть определена с помощью соотношений (Андреев и Башкин [10]):

$$\mathbf{J}_n = (\rho_n - \rho_{nn} - \rho_{np}) \mathbf{V}_{\text{qp}} + \rho_{nn} \mathbf{V}_{ns} + \rho_{np} \mathbf{V}_{ps}, \quad (5.2)$$

$$\mathbf{J}_p = (\rho_p - \rho_{pp} - \rho_{pn}) \mathbf{V}_{\text{qp}} + \rho_{pp} \mathbf{V}_{ps} + \rho_{pn} \mathbf{V}_{ns}. \quad (5.3)$$

Здесь  $\rho_\alpha = m_\alpha n_\alpha$ , где  $n_\alpha$  и  $m_\alpha$  – концентрация и масса свободных частиц сорта  $\alpha = n$  или  $p$ ;  $\mathbf{J}_\alpha$  и  $\mathbf{V}_{\alpha s}$  – плотность потока массы и сверхтекучая скорость частиц сорта  $\alpha$ ;  $\mathbf{V}_{\text{qp}}$  – нормальная скорость движения тепловых возбуждений (см., например, Лифшиц и Питаевский [101], Халатников [156]). Мы считаем, что нормальные скорости протонной и нейтронной компонент

смеси совпадают. Вид уравнений (5.2) и (5.3) отличается от "естественного" выражения для плотности потока массы  $\mathbf{J}_\alpha = \rho_\alpha \mathbf{V}_\alpha$  ( $\mathbf{V}_\alpha$  – импульс единицы массы для частиц сорта  $\alpha$ ) по двум причинам.

Во-первых, в смеси, состоящей из двух сверхтекучих веществ, возникает три типа независимых движений: движение тепловых возбуждений со скоростью  $\mathbf{V}_{\text{qp}}$  и два сверхтекучих движения со скоростями  $\mathbf{V}_{\text{ns}}$  и  $\mathbf{V}_{\text{ps}}$ . Каждое из этих движений переносит определенную массу (см., например, Халатников [154]).

Во-вторых, сверхтекучее движение одной из компонент смеси сопровождается переносом массы другой компоненты и наоборот. Это связано с тем, что в сильно неидеальной ферми-жидкости (которой является нейтрон-протонная жидкость в ядрах нейтронных звезд) в эффективную массу частиц одного сорта вносят вклад нуклоны обоих сортов (см. Сйоберг [133]). Поэтому сверхтекучее движение например, нейтронов, приводит к потоку массы протонов. Величина недиагональных элементов  $\rho_{\text{np}}$  и  $\rho_{\text{pn}}$ , таким образом, есть мера интенсивности взаимодействия между нейтронами и протонами. При отсутствии взаимодействия между ними недиагональные элементы равны 0. Из феноменологического анализа Андреева и Башкина [10] следует, что матрица  $\rho_{\alpha\alpha'}$  симметрична ( $\rho_{\text{np}} = \rho_{\text{pn}}$ ), поскольку может быть представлена в виде:

$$\rho_{\alpha\alpha'} = \left( \frac{\partial^2 E}{\partial \mathbf{V}_{\alpha s} \partial \mathbf{V}_{\alpha' s}} \right)_{n_n, n_p, T}, \quad (5.4)$$

где  $E$  – энергия единицы объема в системе координат, в которой  $\mathbf{V}_{\text{qp}} = 0$ ;  $T$  – температура.

Матрица сверхтекучих плотностей  $\rho_{\alpha\alpha'}$  нейтрон-протонной смеси вычислялась в работах Боруманда и др. [22] и Комера и Джойнта [80]. При этом температура вещества предполагалась равной 0. Во многих случаях такое приближение не может быть использовано. Например, матрицу  $\rho_{\alpha\alpha'}$  при ненулевых температурах необходимо знать, если нас интересуют кинетические свойства вещества, в частности кинетические коэффициенты (коэффициенты объемной и сдвиговой вязкости, коэффициент диффузии). При исследовании пульсаций нейтронных звезд также нужно учитывать влияние

температуры на матрицу сверхтекучих плотностей в том случае, если колеблется достаточно горячая звезда или если тепловая энергия звезды порядка или меньше пульсационной энергии. (Предполагается, что пульсационная энергия, диссипируя в тепло, может существенно нагреть звезду, тем самым изменив матрицу  $\rho_{\alpha\alpha'}$ . Простой пример, иллюстрирующий влияние температурных эффектов на пульсации нейтронных звезд, рассмотрен Гусаковым и др. [44].)

В данной главе рассчитана матрица сверхтекучих плотностей нейтрон-протонной смеси для ненулевых температур. Вычисления проведены в рамках теории ферми-жидкости Ландау, обобщенной Ларкиным и Мигдалом [90] и Леггеттом [97] на случай сверхтекучести. Для упрощения вычислений мы считали что нейтроны, как и протоны, спариваются в состоянии  $^1S_0$ . В разделе 5.4.1 показано, как полученные результаты могут быть распространены на случай триплетного спаривания нейтронов  $^3P_2$ .

## 5.2 Нейтрон-протонная смесь в ядре нейтронной звезды

Прежде чем рассчитывать матрицу  $\rho_{\alpha\alpha'}$ , рассмотрим нейтрон-протонную смесь без токов. Тривиально обобщая гамильтониан сверхтекучей ферми-жидкости, предложенный Леггеттом [97], на случай сверхтекучих смесей, можно записать:

$$H - \mu_n N_n - \mu_p N_p = H_{\text{LF}} + H_{\text{pairing}}. \quad (5.5)$$

Здесь  $H$  – гамильтониан нашей системы, складывающийся из стандартного гамильтониана  $H_{\text{LF}}$  теории ферми-жидкости Ландау для смесей и "спаривательного" гамильтониана  $H_{\text{pairing}}$ ;  $N_\alpha$  и  $\mu_\alpha$  – оператор плотности числа частиц и химический потенциал частиц сорта  $\alpha$ . Выражение для  $H_{\text{LF}}$  имеет вид (см., например, Сйоберг [133]):

$$\begin{aligned} H_{\text{LF}} = & \sum_{\mathbf{p}\sigma\alpha} \varepsilon_0^{(\alpha)}(\mathbf{p}) \left( a_{\mathbf{p}}^{(\alpha)\dagger} a_{\mathbf{p}}^{(\alpha)} - \theta_{\mathbf{p}}^{(\alpha)} \right) \\ & + \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{p}\mathbf{p}'\sigma\sigma'\alpha\alpha'} f^{\alpha\alpha'}(\mathbf{p},\mathbf{p}') \left( a_{\mathbf{p}}^{(\alpha)\dagger} a_{\mathbf{p}}^{(\alpha)} - \theta_{\mathbf{p}}^{(\alpha)} \right) \left( a_{\mathbf{p}'}^{(\alpha')\dagger} a_{\mathbf{p}'}^{(\alpha')} - \theta_{\mathbf{p}'}^{(\alpha')} \right). \end{aligned} \quad (5.6)$$

В формуле (5.6) суммирование ведется по импульсам частиц  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{p}'$ , по проекциям спина  $\sigma, \sigma'$  на ось квантования и по сортам частиц  $\alpha, \alpha' = n$  или  $p$ ;  $a_{\mathbf{p}}^{(\alpha)} \equiv a_{\mathbf{p}\sigma}^{(\alpha)} = a_{\mathbf{p}\uparrow}^{(\alpha)}$  или  $a_{\mathbf{p}\downarrow}^{(\alpha)}$  – оператор уничтожения нормальной квазичастицы (не боголюбовского возбуждения!) сорта  $\alpha$  в состоянии  $(\mathbf{p}\sigma)$ . Чтобы не делать обозначения слишком громоздкими, мы не выписываем спиновые индексы у величин, если это не может привести к недоразумениям. Далее,  $\theta_{\mathbf{p}}^{(\alpha)} = \theta(p_{F\alpha} - |\mathbf{p}|)$ , где  $\theta(x)$  – ступенчатая функция;  $\varepsilon_0^{(\alpha)}(\mathbf{p}) = v_{F\alpha}(|\mathbf{p}| - p_{F\alpha})$ , где  $v_{F\alpha}$  и  $p_{F\alpha}$  – ферми-скорость и ферми-импульс частиц сорта  $\alpha$ ;  $f^{\alpha\alpha'}(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$  – усредненная по спинам функция взаимодействия между частицами сортов  $\alpha$  и  $\alpha'$  (усреднение по спинам введено в исходный гамильтониан для упрощения обозначений; учет зависимости функции взаимодействия квазичастиц от спинов не скажется на результатах). Функция  $f^{\alpha\alpha'}(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$  является (усредненной по спинам) второй вариационной производной от энергии по числу частиц; поэтому она симметрична относительно замен  $\mathbf{p} \rightleftharpoons \mathbf{p}'$  и  $\alpha \rightleftharpoons \alpha'$  (см., например, Лифшиц и Питаевский [101], Сйоберг [133]):

$$f^{\alpha\alpha'}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') = f^{\alpha'\alpha}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') = f^{\alpha\alpha'}(\mathbf{p}', \mathbf{p}). \quad (5.7)$$

Выражение для спаривательного гамильтониана имеет вид:

$$H_{\text{pairing}} = \sum_{\mathbf{p}\mathbf{p}'\alpha} \mathcal{V}^{(\alpha)}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') a_{\mathbf{p}'\uparrow}^{(\alpha)\dagger} a_{-\mathbf{p}'\downarrow}^{(\alpha)\dagger} a_{-\mathbf{p}\downarrow}^{(\alpha)} a_{\mathbf{p}\uparrow}^{(\alpha)}. \quad (5.8)$$

Предположим, что для матричного элемента  $\mathcal{V}^{(\alpha)}(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$  справедливы соотношения симметрии:

$$\mathcal{V}^{(\alpha)}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') = \mathcal{V}^{(\alpha)}(\mathbf{p}', \mathbf{p}) = \mathcal{V}^{(\alpha)}(\mathbf{p}, -\mathbf{p}') = \mathcal{V}^{(\alpha)}(-\mathbf{p}, \mathbf{p}'). \quad (5.9)$$

Если функция  $\mathcal{V}^{(\alpha)}(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$  не удовлетворяет этим условиям (например, в случае спаривания с не равным нулю орбитальным моментом пары выполнение всех условий 5.9 необязательно), ее необходимо симметризовать так, чтобы соотношения (5.9) выполнялись (см., например, Легgett [98]). В нашу формулу (5.8) должен входить именно симметризованный матричный элемент.

Для диагонализации оператора (5.5) введем стандартным образом опе-

раторы боголюбовских возбуждений  $b_{\mathbf{p}\sigma}^{(\alpha)}$ :

$$a_{\mathbf{p}\uparrow}^{(\alpha)} = u_{\mathbf{p}}^{(\alpha)} b_{\mathbf{p}\uparrow}^{(\alpha)} + v_{\mathbf{p}}^{(\alpha)} b_{-\mathbf{p}\downarrow}^{(\alpha)\dagger}, \quad (5.10)$$

$$a_{\mathbf{p}\downarrow}^{(\alpha)} = u_{\mathbf{p}}^{(\alpha)} b_{\mathbf{p}\downarrow}^{(\alpha)} - v_{\mathbf{p}}^{(\alpha)} b_{-\mathbf{p}\uparrow}^{(\alpha)\dagger}. \quad (5.11)$$

Функции  $u_{\mathbf{p}}^{(\alpha)}$  и  $v_{\mathbf{p}}^{(\alpha)}$  связаны нормировкой и симметричны относительно замены  $\mathbf{p} \rightleftharpoons -\mathbf{p}$ :

$$u_{\mathbf{p}}^{(\alpha)2} + v_{\mathbf{p}}^{(\alpha)2} = 1, \quad u_{\mathbf{p}}^{(\alpha)} = u_{-\mathbf{p}}^{(\alpha)}, \quad v_{\mathbf{p}}^{(\alpha)} = v_{-\mathbf{p}}^{(\alpha)}. \quad (5.12)$$

Для собственных значений оператора (5.5) теперь получим:

$$\begin{aligned} E - \mu_n n_n - \mu_p n_p &= \sum_{\mathbf{p}\sigma\alpha} \varepsilon_0^{(\alpha)}(\mathbf{p}) \left( n_{\mathbf{p}}^{(\alpha)} - \theta_{\mathbf{p}}^{(\alpha)} \right) \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{p}\mathbf{p}'\sigma\sigma'\alpha\alpha'} f^{\alpha\alpha'}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \left( n_{\mathbf{p}}^{(\alpha)} - \theta_{\mathbf{p}}^{(\alpha)} \right) \left( n_{\mathbf{p}'}^{(\alpha')} - \theta_{\mathbf{p}'}^{(\alpha')} \right) \\ &+ \sum_{\mathbf{p}\mathbf{p}'\alpha} \mathcal{V}^{(\alpha)}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') u_{\mathbf{p}}^{(\alpha)} v_{\mathbf{p}}^{(\alpha)} u_{\mathbf{p}'}^{(\alpha)} v_{\mathbf{p}'}^{(\alpha)} \left( 1 - 2f_{\mathbf{p}}^{(\alpha)} \right) \left( 1 - 2f_{\mathbf{p}'}^{(\alpha)} \right), \end{aligned} \quad (5.13)$$

где  $n_{\mathbf{p}}^{(\alpha)}$  и  $f_{\mathbf{p}}^{(\alpha)}$  – функции распределения квазичастиц и боголюбовских возбуждений сорта  $\alpha$ , соответственно:

$$n_{\mathbf{p}}^{(\alpha)} = \langle |a_{\mathbf{p}\uparrow}^{(\alpha)\dagger} a_{\mathbf{p}\uparrow}^{(\alpha)}| \rangle = \langle |a_{\mathbf{p}\downarrow}^{(\alpha)\dagger} a_{\mathbf{p}\downarrow}^{(\alpha)}| \rangle = v_{\mathbf{p}}^{(\alpha)2} + \left( u_{\mathbf{p}}^{(\alpha)2} - v_{\mathbf{p}}^{(\alpha)2} \right) f_{\mathbf{p}}^{(\alpha)}, \quad (5.14)$$

$$f_{\mathbf{p}}^{(\alpha)} = \langle |b_{\mathbf{p}\uparrow}^{(\alpha)\dagger} b_{\mathbf{p}\uparrow}^{(\alpha)}| \rangle = \langle |b_{\mathbf{p}\downarrow}^{(\alpha)\dagger} b_{\mathbf{p}\downarrow}^{(\alpha)}| \rangle. \quad (5.15)$$

Энтропия системы  $S$  определяется обычным комбинаторным выражением:

$$S = - \sum_{\mathbf{p}\sigma\alpha} \left[ \left( 1 - f_{\mathbf{p}}^{(\alpha)} \right) \ln \left( 1 - f_{\mathbf{p}}^{(\alpha)} \right) + f_{\mathbf{p}}^{(\alpha)} \ln f_{\mathbf{p}}^{(\alpha)} \right]. \quad (5.16)$$

Минимизируя термодинамический потенциал  $F = E - \mu_n n_n - \mu_p n_p - TS$  по отношению к неизвестным пока функциям  $f_{\mathbf{p}}^{(\alpha)}$  и  $u_{\mathbf{p}}^{(\alpha)}$  (величина  $v_{\mathbf{p}}^{(\alpha)}$  выражается через  $u_{\mathbf{p}}^{(\alpha)}$  при помощи нормировки (5.12)), стандартным способом находим:

$$f_{\mathbf{p}}^{(\alpha)} = \frac{1}{1 + e^{E_{\mathbf{p}}^{(\alpha)}/T}}, \quad E_{\mathbf{p}}^{(\alpha)} = \sqrt{\varepsilon^{(\alpha)2}(\mathbf{p}) + \Delta_{\mathbf{p}}^{(\alpha)2}}, \quad (5.17)$$

$$u_{\mathbf{p}}^{(\alpha)2} = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\varepsilon^{(\alpha)}(\mathbf{p})}{E_{\mathbf{p}}^{(\alpha)}} \right). \quad (5.18)$$



Здесь и далее мы считаем, что  $\hbar = k_B = V = 1$ , где  $\hbar$  – постоянная Планка,  $k_B$  – постоянная Больцмана и  $V$  – нормировочный объем. В формулах (5.17) – (5.18) величина  $E_{\mathbf{p}}^{(\alpha)}$  – энергия боголюбовских возбуждений;  $\Delta_{\mathbf{p}}^{(\alpha)}$  – сверхтекучая щель для частиц сорта  $\alpha$ , которая может быть найдена из уравнения:

$$\Delta_{\mathbf{p}}^{(\alpha)} = - \sum_{\mathbf{p}'} \mathcal{V}^{(\alpha)}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') u_{\mathbf{p}'}^{(\alpha)} v_{\mathbf{p}'}^{(\alpha)} \left(1 - 2f_{\mathbf{p}'}^{(\alpha)}\right). \quad (5.19)$$

Наконец,  $\varepsilon^{(\alpha)}(\mathbf{p})$  – энергия квазичастицы сорта  $\alpha$ , которая была бы у нее в отсутствие сверхтекучести:

$$\varepsilon^{(\alpha)}(\mathbf{p}) = \varepsilon_0^{(\alpha)}(\mathbf{p}) + \sum_{\mathbf{p}'\sigma'\alpha'} f^{\alpha\alpha'}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \left(n_{\mathbf{p}'}^{(\alpha')} - \theta_{\mathbf{p}'}^{(\alpha')}\right). \quad (5.20)$$

В формуле (5.20) равновесная функция распределения квазичастиц  $n_{\mathbf{p}}^{(\alpha)}$  определяется выражением (5.14), в котором  $f_{\mathbf{p}}^{(\alpha)}$  и  $u_{\mathbf{p}}^{(\alpha)}$  даются формулами (5.17)–(5.18). Первое слагаемое в правой части равенства (5.20) по порядку величины равно:  $\varepsilon_0^{(\alpha)}(\mathbf{p}) \sim (T + \Delta^{(\alpha)})$ , где  $\Delta^{(\alpha)}$  – характерный размер щели. В термодинамическом равновесии второе слагаемое в (5.20) много меньше первого слагаемого. Действительно, для любой функции  $f(p)$ , гладкой вблизи поверхности Ферми, справедлива оценка:

$$\int_0^\infty f(p) p^2 (n_{\mathbf{p}}^{(\alpha)} - \theta_{\mathbf{p}}^{(\alpha)}) d\mathbf{p} \sim f(p_{\text{F}\alpha}) n_\alpha \left([T/\mu_\alpha]^2 + [\Delta^{(\alpha)}/\mu_\alpha]^2\right), \quad (5.21)$$

Поскольку  $(T + \Delta^{(\alpha)})/\mu_\alpha \ll 1$ , вторым слагаемым в (5.20) можно пренебречь.

### 5.3 Нейтрон-протонная смесь с учетом сверхтекучих токов

#### 5.3.1 Общие формулы

В системе, в которой существуют сверхтекучие токи, куперовские пары образуются при спаривании состояний  $(\mathbf{p} + \mathbf{Q}_\alpha, \uparrow)$  и  $(-\mathbf{p} + \mathbf{Q}_\alpha, \downarrow)$ , где  $\mathbf{Q}_\alpha \equiv m_\alpha \mathbf{V}_{\alpha s} \ll p_{\text{F}\alpha}$  (напомним, что мы рассматриваем синглетное спаривание частиц обоих сортов). В этом случае спаривательный гамильтониан должен быть записан в виде (см., например, Фейнман [148], Де Жен [50]):

$$H_{\text{pairing}}(\mathbf{Q}_\alpha) = \sum_{\mathbf{p}\mathbf{p}'\alpha} \mathcal{V}_{\mathbf{Q}_\alpha}^{(\alpha)}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') a_{\mathbf{p}'+\mathbf{Q}_\alpha\uparrow}^{(\alpha)\dagger} a_{-\mathbf{p}'+\mathbf{Q}_\alpha\downarrow}^{(\alpha)\dagger} a_{-\mathbf{p}+\mathbf{Q}_\alpha\downarrow}^{(\alpha)} a_{\mathbf{p}+\mathbf{Q}_\alpha\uparrow}^{(\alpha)}. \quad (5.22)$$

Здесь  $\mathcal{V}_{\mathbf{Q}_\alpha}^{(\alpha)}(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$  – матричный элемент, отвечающий за рассеяние частиц сорта  $\alpha$  из состояний  $(\mathbf{p} + \mathbf{Q}_\alpha, \uparrow)$ ,  $(-\mathbf{p} + \mathbf{Q}_\alpha, \downarrow)$  в состояния  $(\mathbf{p}' + \mathbf{Q}_\alpha, \uparrow)$ ,  $(-\mathbf{p}' + \mathbf{Q}_\alpha, \downarrow)$ . В силу вращательной симметрии очевидно, что  $\mathcal{V}_{\mathbf{Q}_\alpha}^{(\alpha)}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \approx \mathcal{V}^{(\alpha)}(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$  с точностью до членов порядка  $Q_\alpha^2$ . Поэтому в дальнейшем мы будем везде пренебрегать зависимостью  $\mathcal{V}_{\mathbf{Q}_\alpha}^{(\alpha)}(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$  от импульса  $\mathbf{Q}_\alpha$ .

Выразим операторы квазичастиц через операторы боголюбовских возбуждений по формулам:

$$a_{\mathbf{p}+\mathbf{Q}_\alpha\uparrow}^{(\alpha)} = U_{\mathbf{p}}^{(\alpha)} b_{\mathbf{p}+\mathbf{Q}_\alpha\uparrow}^{(\alpha)} + V_{\mathbf{p}}^{(\alpha)} b_{-\mathbf{p}+\mathbf{Q}_\alpha\downarrow}^{(\alpha)\dagger}, \quad (5.23)$$

$$a_{\mathbf{p}+\mathbf{Q}_\alpha\downarrow}^{(\alpha)} = U_{\mathbf{p}}^{(\alpha)} b_{\mathbf{p}+\mathbf{Q}_\alpha\downarrow}^{(\alpha)} - V_{\mathbf{p}}^{(\alpha)} b_{-\mathbf{p}+\mathbf{Q}_\alpha\uparrow}^{(\alpha)\dagger}, \quad (5.24)$$

где величины  $U_{\mathbf{p}}^{(\alpha)}$  и  $V_{\mathbf{p}}^{(\alpha)}$  удовлетворяют равенствам

$$U_{\mathbf{p}}^{(\alpha)2} + V_{\mathbf{p}}^{(\alpha)2} = 1, \quad U_{\mathbf{p}}^{(\alpha)} = U_{-\mathbf{p}}^{(\alpha)}, \quad V_{\mathbf{p}}^{(\alpha)} = V_{-\mathbf{p}}^{(\alpha)}, \quad (5.25)$$

аналогичным (5.12). В итоге получим следующее выражение для энергии системы с учетом сверхтекучего движения:

$$\begin{aligned} E - \mu_n n_n - \mu_p n_p &= \sum_{\mathbf{p}\sigma\alpha} \varepsilon_0^{(\alpha)}(\mathbf{p} + \mathbf{Q}_\alpha) \left( \mathcal{N}_{\mathbf{p}+\mathbf{Q}_\alpha}^{(\alpha)} - \theta_{\mathbf{p}+\mathbf{Q}_\alpha}^{(\alpha)} \right) \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{p}\mathbf{p}'\sigma\sigma'\alpha\alpha'} f^{\alpha\alpha'}(\mathbf{p} + \mathbf{Q}_\alpha, \mathbf{p}' + \mathbf{Q}_{\alpha'}) \left( \mathcal{N}_{\mathbf{p}+\mathbf{Q}_\alpha}^{(\alpha)} - \theta_{\mathbf{p}+\mathbf{Q}_\alpha}^{(\alpha)} \right) \left( \mathcal{N}_{\mathbf{p}'+\mathbf{Q}_{\alpha'}}^{(\alpha')} - \theta_{\mathbf{p}'+\mathbf{Q}_{\alpha'}}^{(\alpha')} \right) \\ &+ \sum_{\mathbf{p}\mathbf{p}'\alpha} \mathcal{V}^{(\alpha)}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') U_{\mathbf{p}}^{(\alpha)} V_{\mathbf{p}}^{(\alpha)} U_{\mathbf{p}'}^{(\alpha)} V_{\mathbf{p}'}^{(\alpha)} \\ &\times \left( 1 - \mathcal{F}_{\mathbf{p}+\mathbf{Q}_\alpha}^{(\alpha)} - \mathcal{F}_{-\mathbf{p}+\mathbf{Q}_\alpha}^{(\alpha)} \right) \left( 1 - \mathcal{F}_{\mathbf{p}'+\mathbf{Q}_\alpha}^{(\alpha)} - \mathcal{F}_{-\mathbf{p}'+\mathbf{Q}_\alpha}^{(\alpha)} \right). \end{aligned} \quad (5.26)$$

Здесь  $\mathcal{N}_{\mathbf{p}+\mathbf{Q}_\alpha}^{(\alpha)}$  и  $\mathcal{F}_{\mathbf{p}+\mathbf{Q}_\alpha}^{(\alpha)}$  – функции распределения квазичастиц и боголюбовских возбуждений (с импульсом  $\mathbf{p} + \mathbf{Q}_\alpha$ ), соответственно:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_{\mathbf{p}+\mathbf{Q}_\alpha}^{(\alpha)} &= \langle |a_{\mathbf{p}+\mathbf{Q}_\alpha\uparrow}^{(\alpha)\dagger} a_{\mathbf{p}+\mathbf{Q}_\alpha\uparrow}^{(\alpha)}| \rangle = \langle |a_{\mathbf{p}+\mathbf{Q}_\alpha\downarrow}^{(\alpha)\dagger} a_{\mathbf{p}+\mathbf{Q}_\alpha\downarrow}^{(\alpha)}| \rangle \\ &= V_{\mathbf{p}}^{(\alpha)2} + U_{\mathbf{p}}^{(\alpha)2} \mathcal{F}_{\mathbf{p}+\mathbf{Q}_\alpha}^{(\alpha)} - V_{\mathbf{p}}^{(\alpha)2} \mathcal{F}_{-\mathbf{p}+\mathbf{Q}_\alpha}^{(\alpha)}, \end{aligned} \quad (5.27)$$

$$\mathcal{F}_{\mathbf{p}+\mathbf{Q}_\alpha}^{(\alpha)} = \langle |b_{\mathbf{p}+\mathbf{Q}_\alpha\uparrow}^{(\alpha)\dagger} b_{\mathbf{p}+\mathbf{Q}_\alpha\uparrow}^{(\alpha)}| \rangle = \langle |b_{\mathbf{p}+\mathbf{Q}_\alpha\downarrow}^{(\alpha)\dagger} b_{\mathbf{p}+\mathbf{Q}_\alpha\downarrow}^{(\alpha)}| \rangle. \quad (5.28)$$

Энтропия системы по-прежнему выражается формулой (5.16) с той лишь разницей, что теперь вместо функции распределения  $f_{\mathbf{p}}^{(\alpha)}$  должна стоять функция  $\mathcal{F}_{\mathbf{p}+\mathbf{Q}_\alpha}^{(\alpha)}$ .

Минимизируя термодинамический потенциал  $F = E - \mu_n n_n - \mu_p n_p - TS$  относительно неизвестных функций  $\mathcal{F}_{\mathbf{p}+\mathbf{Q}_\alpha}^{(\alpha)}$  и  $U_{\mathbf{p}}^{(\alpha)}$ , находим:

$$\mathcal{F}_{\mathbf{p}+\mathbf{Q}_\alpha}^{(\alpha)} = \frac{1}{1 + e^{\mathfrak{E}_{\mathbf{p}+\mathbf{Q}_\alpha}^{(\alpha)}/T}}, \quad (5.29)$$

$$\mathfrak{E}_{\mathbf{p}+\mathbf{Q}_\alpha}^{(\alpha)} = \frac{1}{2} \left( H_{\mathbf{p}+\mathbf{Q}_\alpha}^{(\alpha)} - H_{-\mathbf{p}+\mathbf{Q}_\alpha}^{(\alpha)} \right) + \sqrt{\frac{1}{4} \left( H_{\mathbf{p}+\mathbf{Q}_\alpha}^{(\alpha)} + H_{-\mathbf{p}+\mathbf{Q}_\alpha}^{(\alpha)} \right)^2 + \mathcal{D}_{\mathbf{p}}^{(\alpha)2}}, \quad (5.30)$$

$$U_{\mathbf{p}}^{(\alpha)2} = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{H_{\mathbf{p}+\mathbf{Q}_\alpha}^{(\alpha)} + H_{-\mathbf{p}+\mathbf{Q}_\alpha}^{(\alpha)}}{2\mathfrak{E}_{\mathbf{p}+\mathbf{Q}_\alpha}^{(\alpha)} + H_{-\mathbf{p}+\mathbf{Q}_\alpha}^{(\alpha)} - H_{\mathbf{p}+\mathbf{Q}_\alpha}^{(\alpha)}} \right). \quad (5.31)$$

Здесь  $\mathfrak{E}_{\mathbf{p}+\mathbf{Q}_\alpha}^{(\alpha)}$  – энергия боголюбовского возбуждения с импульсом  $\mathbf{p}+\mathbf{Q}_\alpha$ . Для того, чтобы состояние системы было устойчивым, необходимо выполнение условия  $\mathfrak{E}_{\mathbf{p}+\mathbf{Q}_\alpha}^{(\alpha)} \geq 0$ . Далее,  $\mathcal{D}_{\mathbf{p}}^{(\alpha)}$  – сверхтекучая щель, которая может быть найдена из уравнения:

$$\mathcal{D}_{\mathbf{p}}^{(\alpha)} = - \sum_{\mathbf{p}'} \mathcal{V}^{(\alpha)}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') U_{\mathbf{p}'}^{(\alpha)} V_{\mathbf{p}'}^{(\alpha)} \left( 1 - \mathcal{F}_{\mathbf{p}'+\mathbf{Q}_\alpha}^{(\alpha)} - \mathcal{F}_{-\mathbf{p}'+\mathbf{Q}_\alpha}^{(\alpha)} \right). \quad (5.32)$$

Наконец,  $H_{\mathbf{p}+\mathbf{Q}_\alpha}^{(\alpha)}$  – энергия квазичастицы сорта  $\alpha$  с импульсом  $\mathbf{p}+\mathbf{Q}_\alpha$ , которая была бы у нее в отсутствие сверхтекучести:

$$H_{\mathbf{p}+\mathbf{Q}_\alpha}^{(\alpha)} = \varepsilon_0^{(\alpha)}(\mathbf{p} + \mathbf{Q}_\alpha) + \sum_{\mathbf{p}'\sigma'\alpha'} f^{\alpha\alpha'}(\mathbf{p} + \mathbf{Q}_\alpha, \mathbf{p}' + \mathbf{Q}_{\alpha'}) \left( \mathcal{N}_{\mathbf{p}'+\mathbf{Q}_{\alpha'}}^{(\alpha')} - \theta_{\mathbf{p}'+\mathbf{Q}_{\alpha'}}^{(\alpha')} \right). \quad (5.33)$$

Заметим, однако, что функции распределения квазичастиц задаются выражением (5.27). Пользуясь тем, что  $Q_\alpha \ll p_{\text{F}\alpha}$ , можно разложить энергию  $H_{\mathbf{p}+\mathbf{Q}_\alpha}^{(\alpha)}$  в ряд по  $Q_{\alpha'}$  ( $\alpha' = n, p$ ) и записать:

$$H_{\mathbf{p}+\mathbf{Q}_\alpha}^{(\alpha)} = \varepsilon^{(\alpha)}(\mathbf{p}) + \Delta H_{\mathbf{p}}^{(\alpha)}. \quad (5.34)$$

В случае синглетного спаривания в задаче существует только три вектора  $\mathbf{p}$ ,  $\mathbf{Q}_n$  и  $\mathbf{Q}_p$ , из которых можно сконструировать скаляр  $\Delta H_{\mathbf{p}}^{(\alpha)}$ . С точностью

до членов порядка  $\sim Q_\alpha/p_{\text{F}\alpha}$  выражение для  $\Delta H_{\mathbf{p}}^{(\alpha)}$  может быть представлено в виде:

$$\Delta H_{\mathbf{p}}^{(\alpha)} = \sum_{\alpha'} \gamma_{\alpha\alpha'}(p) \frac{\mathbf{p} \mathbf{Q}_{\alpha'}}{m_{\alpha'}}, \quad (5.35)$$

где  $\gamma_{\alpha\alpha'}(p)$  – неизвестная матрица, функция скаляра  $p$ , которая будет вычислена в следующем разделе. Заметим, что согласно соотношениям симметрии (5.9) и формулам (5.30)–(5.32) и (5.34)–(5.35) с точностью до членов  $\sim Q_\alpha^2$  справедливы равенства:

$$\mathcal{D}_{\mathbf{p}}^{(\alpha)} = \Delta_{\mathbf{p}}^{(\alpha)}, \quad U_{\mathbf{p}}^{(\alpha)} = u_{\mathbf{p}}^{(\alpha)}, \quad V_{\mathbf{p}}^{(\alpha)} = v_{\mathbf{p}}^{(\alpha)}. \quad (5.36)$$

Принимая во внимание эти равенства, энергию боголюбовских возбуждений  $\mathfrak{E}_{\mathbf{p}+\mathbf{Q}_\alpha}^{(\alpha)}$ , а также функции распределения квазичастиц и боголюбовских возбуждений можно по аналогии с (5.34) разложить в ряд:

$$\mathfrak{E}_{\mathbf{p}+\mathbf{Q}_\alpha}^{(\alpha)} = E_{\mathbf{p}}^{(\alpha)} + \Delta H_{\mathbf{p}}^{(\alpha)}, \quad (5.37)$$

$$\mathcal{F}_{\mathbf{p}+\mathbf{Q}_\alpha}^{(\alpha)} = f_{\mathbf{p}}^{(\alpha)} + \frac{\partial f_{\mathbf{p}}^{(\alpha)}}{\partial E_{\mathbf{p}}^{(\alpha)}} \Delta H_{\mathbf{p}}^{(\alpha)}, \quad \mathcal{N}_{\mathbf{p}+\mathbf{Q}_\alpha}^{(\alpha)} = n_{\mathbf{p}}^{(\alpha)} + \frac{\partial f_{\mathbf{p}}^{(\alpha)}}{\partial E_{\mathbf{p}}^{(\alpha)}} \Delta H_{\mathbf{p}}^{(\alpha)}. \quad (5.38)$$

### 5.3.2 Расчет матрицы $\gamma_{\alpha\alpha'}$

Для того, чтобы найти неизвестную матрицу  $\gamma_{\alpha\alpha'}(p_{\text{F}\alpha})$ , воспользуемся уравнением (5.33). Используя формулы (5.34) и (5.38), разложим все функции в этом уравнении в ряд по импульсам  $\mathbf{Q}_\alpha$ , ограничиваясь линейными членами. Далее, пренебрегая в силу (5.21) всеми членами в (5.33), под знаком суммы у которых встречается величина  $(n_{\mathbf{p}'}^{(\alpha')} - \theta_{\mathbf{p}'}^{(\alpha')})$ , а также принимая во внимание уравнение (5.20), получаем:

$$\Delta H_{\mathbf{p}}^{(\alpha)} = \frac{\mathbf{p} \mathbf{Q}_\alpha}{m_\alpha^*} + \sum_{\mathbf{p}'\sigma'\alpha'} f^{\alpha\alpha'}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \left\{ \frac{\partial f_{\mathbf{p}'}^{(\alpha')}}{\partial E_{\mathbf{p}'}^{(\alpha')}} \Delta H_{\mathbf{p}'}^{(\alpha')} - \frac{\partial \theta_{\mathbf{p}'}^{(\alpha')}}{\partial \mathbf{p}'} \mathbf{Q}_{\alpha'} \right\}. \quad (5.39)$$

Рассчитаем сумму, входящую в уравнение (5.39). Для этого учтем, что основной вклад в эту сумму вносят импульсы  $|\mathbf{p}'| \sim p_{\text{F}\alpha'}$ , поскольку выражение в фигурных скобках отлично от нуля только вблизи поверхности Ферми частиц сорта  $\alpha'$ . Кроме того, в дальнейшем нас будут интересовать только такие импульсы  $\mathbf{p}$ , что  $|\mathbf{p}| = p_{\text{F}\alpha}$ . Поэтому в плавной функции  $f^{\alpha\alpha'}(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$

можно положить  $|\mathbf{p}| = p_{\text{F}\alpha}$  и  $|\mathbf{p}'| = p_{\text{F}\alpha'}$  и разложить ее по полиномам Лежандра  $P_l(\cos \theta)$ :

$$f^{\alpha\alpha'}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') = \sum_l f_l^{\alpha\alpha'} P_l(\cos \theta), \quad (5.40)$$

где  $\theta$  – угол между векторами  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{p}'$ . Далее, принимая во внимание формулу (5.35), а также то, что сверхтекучие щели  $\Delta_{\mathbf{p}}^{(\alpha)}$  ( $\alpha = \text{n}, \text{p}$ ) изотропны, получаем:

$$\sum_{\mathbf{p}'\sigma'} f^{\alpha\alpha'}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \frac{\partial f_{\mathbf{p}'}^{(\alpha')}}{\partial E_{\mathbf{p}'}^{(\alpha')}} \Delta H_{\mathbf{p}'}^{(\alpha')} = - \frac{f_1^{\alpha\alpha'} N_{0\alpha'}}{3} \frac{p_{\text{F}\alpha'}}{p_{\text{F}\alpha}} \Phi_{\alpha'} \Delta H_{\mathbf{p}}^{(\alpha')}, \quad (5.41)$$

$$\sum_{\mathbf{p}'\sigma'} f^{\alpha\alpha'}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \frac{\partial \theta_{\mathbf{p}'}^{(\alpha')}}{\partial \mathbf{p}'} \mathbf{Q}_{\alpha'} = - \frac{f_1^{\alpha\alpha'} N_{0\alpha'}}{3} \frac{p_{\text{F}\alpha'}}{p_{\text{F}\alpha}} \frac{\mathbf{p} \mathbf{Q}_{\alpha'}}{m_{\alpha'}^*}. \quad (5.42)$$

Здесь  $N_{0\alpha} = m_{\alpha}^* p_{\text{F}\alpha} / \pi^2$ ;  $m_{\alpha}^* = p_{\text{F}\alpha} / v_{\text{F}\alpha}$  – эффективная масса частиц сорта  $\alpha$ . Функция  $\Phi_{\alpha}$ , задаваемая выражением

$$\Phi_{\alpha} = - \frac{1}{N_{0\alpha}} \sum_{\mathbf{p}\sigma} \frac{\partial f_{\mathbf{p}}^{(\alpha)}}{\partial E_{\mathbf{p}}^{(\alpha)}}, \quad (5.43)$$

рассчитана численно и аппроксимирована удобной аналитической формулой Гнединым и Яковлевым [34] применительно к другой задаче. Аналитическая аппроксимация  $\Phi_{\alpha}$  приведена в Приложении 3. При расчете  $\Phi_{\alpha}$  авторы использовали обычно рассматриваемое приближение, в котором пренебрегается зависимостью щели от величины импульса частицы (следовательно, в изотропном случае щель является функцией только температуры):  $\Delta_{\mathbf{p}}^{(\alpha)} \approx \Delta^{(\alpha)}(|\mathbf{p}| = p_{\text{F}\alpha}) \equiv \Delta^{(\alpha)}(T)$ . В данной работе мы также используем это приближение.

Записывая теперь уравнение (5.39) для нейтронов ( $\alpha = \text{n}$ ) и для протонов ( $\alpha = \text{p}$ ) (с учетом формул 5.35 и 5.41–5.42) и приравнивая выражения, стоящие при одинаковых импульсах  $\mathbf{Q}_{\alpha}$  в левой и правой частях этого уравнения, получаем систему четырех линейных уравнений, определяющих

матрицу  $\gamma_{\alpha\alpha'}$ . Решение этой системы может быть записано в виде:

$$\gamma_{\alpha\alpha}(p_{F\alpha}) = \frac{m_\alpha}{m_\alpha^*} \frac{1}{S} \left\{ \left(1 + \frac{F_1^{\alpha\alpha}}{3}\right) \left(1 + \frac{F_1^{\beta\beta}}{3} \Phi_\beta\right) - \left(\frac{F_1^{\alpha\beta}}{3}\right)^2 \Phi_\beta \right\}, \quad (5.44)$$

$$\gamma_{\alpha\beta}(p_{F\alpha}) = \frac{1}{3} \frac{m_\beta}{\sqrt{m_\alpha^* m_\beta^*}} \frac{1}{S} \left(\frac{p_{F\beta}}{p_{F\alpha}}\right)^{3/2} F_1^{\alpha\beta} (1 - \Phi_\beta), \quad (5.45)$$

$$S \equiv \left(1 + \frac{F_1^{\alpha\alpha}}{3} \Phi_\alpha\right) \left(1 + \frac{F_1^{\beta\beta}}{3} \Phi_\beta\right) - \left(\frac{F_1^{\alpha\beta}}{3}\right)^2 \Phi_\alpha \Phi_\beta, \quad (5.46)$$

$$F_1^{\alpha\beta} \equiv f_1^{\alpha\beta} \sqrt{N_{0\alpha} N_{0\beta}}. \quad (5.47)$$

Здесь  $\alpha \neq \beta$  (если, например,  $\alpha = n$ , то  $\beta = p$ ). Эффективные массы  $m_\alpha^*$  связаны с функциями  $f_1^{\alpha\alpha'}$  следующим образом (см. Сйоберг [133], Боруманд и др. [22]):

$$\frac{m_\alpha^*}{m_\alpha} = 1 + \frac{N_{0\alpha}}{3} \left[ f_1^{\alpha\alpha} + \frac{m_\beta}{m_\alpha} \left(\frac{p_{F\beta}}{p_{F\alpha}}\right)^2 f_1^{\alpha\beta} \right] \quad \alpha \neq \beta. \quad (5.48)$$

## 5.4 Матрица сверхтекучих плотностей

### 5.4.1 Выражение для сверхтекучего тока массы

Формулы (5.34) и (5.38)–(5.37) позволяют рассчитать матрицу сверхтекучих плотностей  $\rho_{\alpha\alpha'}$  и выразить ее через матрицу  $\gamma_{\alpha\alpha'}(p_{F\alpha})$ . Это можно сделать, например, используя формулу (5.4), в которой плотность энергии  $E$  задается выражением (5.26). Проще, однако, получить матрицу  $\rho_{\alpha\alpha'}$ , вычислив ток квазичастиц  $\mathbf{J}_\alpha$  (напомним, что в выбранной нами системе отсчета  $V_{\text{др}} = 0$ ). Для этого примем во внимание, что выражение для плотности потока массы несверхтекучей ферми-жидкости может быть применено и к сверхтекучему состоянию (см., например, Легgett [97], Боруманд и др. [22]). Как следует из теории ферми-жидкости Ландау, выражение для плотности потока массы частиц сорта  $\alpha$  (применительно к нашему случаю) имеет вид (см. например, Лифшиц и Питаевский [101], Бейм и Петик [19]):

$$\mathbf{J}_\alpha = \sum_{p\sigma} m_\alpha \frac{\partial H_{\mathbf{p}+\mathbf{Q}_\alpha}^{(\alpha)}}{\partial \mathbf{p}} \mathcal{N}_{\mathbf{p}+\mathbf{Q}_\alpha}^{(\alpha)}. \quad (5.49)$$

Подставляя сюда формулы (5.34) и (5.38) и проводя несложное интегрирование, получаем формулы вида (5.2)–(5.3), причем матрица сверхтекучих плотностей равна ( $\alpha, \alpha' = n, p$ ):

$$\rho_{\alpha\alpha'} = \rho_{\alpha} \gamma_{\alpha\alpha'}(p_{F\alpha}) (1 - \Phi_{\alpha}), \quad (5.50)$$

Из этой формулы прежде всего следует, что матрица  $\rho_{\alpha\alpha'}$  действительно симметрична в полном соответствии с формулой (5.4):  $\rho_{\alpha\alpha'} = \rho_{\alpha'\alpha}$ . Далее, при  $T = T_{c\alpha}$  (где  $T_{c\alpha}$  – критическая температура перехода частиц сорта  $\alpha$  в сверхтекучее состояние),  $\Phi_{\alpha} = 1$  и, следовательно,  $\rho_{\alpha\alpha'} = 0$ , то есть сверхтекучего тока нет. Получим теперь выражения для матрицы  $\rho_{\alpha\alpha'}$  в различных предельных случаях.

I. Пусть  $F_1^{np} = 0$ , то есть протоны и нейтроны не взаимодействуют между собой. Тогда каждая составляющая смеси  $\alpha$  может рассматриваться как независимая сверхтекучая ферми-жидкость и матрица  $\rho_{\alpha\alpha'}$  диагональна. Из формул (5.50) и (5.44)–(5.47) следует выражение для  $\rho_{\alpha\alpha'}$ :

$$\rho_{\alpha\alpha} = \frac{\rho_{\alpha} (1 - \Phi_{\alpha})}{1 + \Phi_{\alpha} F_1^{\alpha\alpha}/3}, \quad \rho_{np} = \rho_{pn} = 0. \quad (5.51)$$

Диагональные элементы  $\rho_{\alpha\alpha}$  совпадают с хорошо известным выражением для сверхтекучей плотности однокомпонентной ферми-жидкости (см., например, Леггетт [97] или Бетбедер-Матибет и Нозьер [20]).

II. Пусть температура смеси равна нулю. Тогда  $\Phi_{\alpha} = 0$  и

$$\rho_{\alpha\alpha} = \rho_{\alpha} \frac{m_{\alpha}}{m_{\alpha}^*} \left( 1 + \frac{F_1^{\alpha\alpha}}{3} \right), \quad (5.52)$$

$$\rho_{np} = \rho_{pn} = \frac{p_{Fn}^2 p_{Fp}^2}{9 \pi^4} m_n m_p f_1^{np}, \quad (5.53)$$

в полном согласии с результатом Боруманда и др. [22]. Из формул (5.52) и (5.53) следует, что в этом случае справедливы равенства:

$$\rho_{nn} + \rho_{np} = \rho_n, \quad \rho_{pp} + \rho_{pn} = \rho_p. \quad (5.54)$$

III. Наконец, предположим, что сверхтекуча только одна из компонент рас-

твора  $\alpha$ . В этом случае  $\Phi_\beta = 1$  ( $\beta \neq \alpha$ ) и мы получаем:

$$\rho_{\alpha\alpha} = \rho_\alpha (1 - \Phi_\alpha) \frac{m_\alpha}{m_\alpha^*} \times \frac{(1 + F_1^{\alpha\alpha}/3) (1 + F_1^{\beta\beta}/3) - (F_1^{\alpha\beta}/3)^2}{(1 + F_1^{\alpha\alpha}\Phi_\alpha/3) (1 + F_1^{\beta\beta}/3) - (F_1^{\alpha\beta}/3)^2 \Phi_\alpha}, \quad (5.55)$$

$$\rho_{\beta\beta} = \rho_{np} = \rho_{pn} = 0. \quad (5.56)$$

Итак, мы рассчитали матрицу сверхтекучих плотностей нейтрон-протонной смеси для ненулевых температур. При этом мы предполагали, что спаривание частиц обоих сортов синглетное, а щель изотропна (то есть не зависит от угла между импульсом боголюбовского возбуждения и осью квантования). В действительности, однако, нейтроны в ядрах нейтронных звезд спариваются в состоянии  ${}^3P_2$  с анизотропной щелью. Проанализируем кратко случай триплетного спаривания нейтронов. В этом случае разложение (5.35) нарушается, поскольку импульс  $\mathbf{p}$  перестает быть единственной векторной величиной, характеризующей систему без токов. Ось квантования теперь тоже задает дополнительное направление. Поэтому формула (5.35) должна быть переписана в виде:

$$\Delta H_{\mathbf{p}}^{(\alpha)} = \sum_{\alpha'} \frac{\mathbf{G}_{\alpha\alpha'} \mathbf{Q}_{\alpha'}}{m_{\alpha'}}, \quad (5.57)$$

где  $\mathbf{G}_{\alpha\alpha'}$  – неизвестная матрица, элементами которой являются векторы. Эта матрица (в принципе) может быть найдена из уравнения (5.33) подобно тому, как это было сделано при нахождении матрицы  $\gamma_{\alpha\alpha'}$ . Из формулы (5.49) для плотности потока массы следует, что компонентами матрицы сверхтекучих плотностей  $\rho_{\alpha\alpha'}$  будут теперь *тензоры* (а не скаляры, как это было в изотропном случае), причем они будут выражаться через параметры Ландау  $F_l^{\alpha\alpha'}$ , где  $l \geq 1$ . Величины  $F_l^{\alpha\alpha'}$  с  $l \geq 2$  для вещества нейтронных звезд неизвестны и, вообще говоря, отнюдь не малы. Таким образом, строгое вычисление матрицы  $\rho_{\alpha\alpha'}$  для случая триплетного спаривания затруднительно (аналогичные проблемы при вычислении сверхтекучей плотности при анизотропном спаривании в гелии-3 подробно обсуждаются в обзоре Леггетта [98]).



Для того, чтобы продвинуться дальше, мы, следуя Байко и др. [14], будем рассматривать вещество нейтронных звезд как совокупность микроскопических доменов с произвольно направленными осями квантования. Очевидно, что усредненная по этим доменам матрица сверхтекучих плотностей будет уже иметь "изотропный" вид (то есть ее элементы будут скалярами). Поэтому мы сможем воспользоваться выражением (5.50) для матрицы  $\rho_{\alpha\alpha'}$ , если введем *эффективную* изотропную щель  $\Delta_{\text{eff}}^{(n)}(T)$ , которую мы выберем в соответствии с Байко и др. [14] следующим образом:

$$\Delta_{\text{eff}}^{(n)}(T) = \min \left\{ \Delta^{(n)}(|\mathbf{p}| = p_{\text{fn}}) \right\}. \quad (5.58)$$

В формуле (5.58) ищется минимум зависящей от углов щели  $\Delta_{\mathbf{p}}^{(n)}$  на нейтронной ферми-поверхности. Использование формулы (5.50) с эффективной щелью  $\Delta_{\text{eff}}^{(n)}(T)$  позволяет получать качественно правильные результаты для матрицы  $\rho_{\alpha\alpha'}$  в случае триплетного спаривания нейтронов. Аппроксимационная формула для щели  $\Delta_{\text{eff}}^{(n)}(T)$  получена в работе Левенфиш и Яковлева [94] и дана в Приложении 3.

#### 5.4.2 Параметры Ландау нейтрон-протонной смеси

Для того, чтобы численно рассчитывать матрицу  $\rho_{\alpha\alpha'}$ , нужно знать параметры Ландау  $F_1^{\alpha\alpha'}$  (а следовательно, величины  $f_1^{\alpha\alpha'}$ , см. формулу 5.47) для асимметричного ядерного вещества. В общем случае  $f_l^{\alpha\alpha'}$  можно представить в виде:  $f_l^{\alpha\alpha'} = f_l^{\alpha\alpha'}(n_b, \delta)$ , где  $n_b = n_n + n_p$  – концентрация барионов;  $\delta = (n_n - n_p)/n_b$  – параметр асимметрии. Функции  $f_l^{\alpha\alpha'}$  можно разложить в ряд по параметру  $\delta \leq 1$ . В силу зарядовой симметрии ядерных взаимодействий

$$f_l^{\text{nn}}(n_b, \delta) = f_l^{\text{pp}}(n_b, -\delta), \quad (5.59)$$

$$f_l^{\text{np}}(n_b, \delta) = f_l^{\text{np}}(n_b, -\delta). \quad (5.60)$$

Поэтому, ограничиваясь линейными по  $\delta$  членами, можно записать:

$$f_1^{\text{nn}} = a(n_b) + \delta b(n_b), \quad (5.61)$$

$$f_1^{\text{pp}} = a(n_b) - \delta b(n_b), \quad (5.62)$$

$$f_1^{\text{np}} = c(n_b). \quad (5.63)$$

Такое приближение было предложено Хэнселом [160]. Для того, чтобы найти неизвестные функции  $a(n_b)$ ,  $b(n_b)$  и  $c(n_b)$ , достаточно знать зависимость  $f_1^{\alpha\alpha'}(n_b)$  в любых двух точках  $\delta = \delta_1$  и  $\delta = \delta_2$ . (Если бы функции  $f_1^{\alpha\alpha'}(n_b)$  были известны для большего числа точек, можно было бы найти следующие члены разложения  $f_1^{\alpha\alpha'}$  в ряд по степеням  $\delta$ . Насколько нам известно, на данный момент в литературе таких данных нет.) В принципе, параметры Ландау асимметричной ядерной материи можно рассчитать теоретически, если знать потенциал взаимодействия нуклонов в вакууме и должным образом учесть многочастичные эффекты. Тем не менее, практически все имеющиеся к настоящему времени расчеты ограничены либо случаем чистого нейтронного вещества, либо случаем симметричного ядерного вещества. Для чистого нейтронного вещества параметры Ландау с  $l = 1$  вычислялись в некотором интервале плотностей выше ядерной плотности в работах Бэкмана и др. [26], Джэксона и др. [53], Вамбаха и др. [31], Маржерона и др. [106] и Швенка и др. [171]. В случае симметричной ядерной материи вычисления обычно проводились для нормальной ядерной плотности (см. Сйоберг [134], Бэкман и др. [27, 28]). Исключение составляет работа Джэксона и др. [53], в которой вычисления проведены сразу для определенного диапазона плотностей (см. ниже). Нам известен лишь один расчет Шеном и др. [173] параметров Ландау асимметричной ядерной материи, находящейся в бета-равновесии с газом электронов (простейшая модель вещества нейтронных звезд). К сожалению, в этой статье рассчитаны только параметры Ландау с  $l = 0$ , в то время как нам нужны параметры Ландау с  $l = 1$ . В этих условиях мы решили использовать (зависящие от плотности) параметры Ландау симметричной ядерной материи и чистого нейтронного вещества, рассчитанные Джэксоном и др. [53] более чем 20 лет назад.

Эти авторы рассчитали параметры Ландау для двух моделей сильных взаимодействий Bethe-Johnson v6 (BJ v6) и Reid v6 для симметричной ядерной материи ( $\delta = 0$ ) и для чистого нейтронного вещества ( $\delta = 1$ ). В случае симметричной ядерной материи величины  $f_1^{\alpha\alpha'}$  записываются в виде (см.

Джэксон и др. [53]):

$$f_1^{\text{nn}}(n_b, 0) = f_1^{\text{pp}}(n_b, 0) = \frac{F_1(n_b, 0) + F_1'(n_b, 0)}{2N_{0\text{sym}}}, \quad (5.64)$$

$$f_1^{\text{np}}(n_b, 0) = \frac{F_1(n_b, 0) - F_1'(n_b, 0)}{2N_{0\text{sym}}}. \quad (5.65)$$

Здесь  $N_{0\text{sym}} \equiv N_{0\text{n}}(n_b, 0) = N_{0\text{p}}(n_b, 0)$ . Величины  $F_1(n_b, 0)$  и  $F_1'(n_b, 0)$  можно представить как функции волнового числа  $k_{\text{Fsym}} = (3\pi^2 n_b/2)^{1/3}$ . Графики зависимости  $F_1$  и  $F_1'$  от параметра  $k_{\text{Fsym}}$  для взаимодействий Reid v6 и VJ v6 представлены на рисунках 14 и 17 статьи Джэксона и др. [53]. Мы аппроксимировали эти функции простыми аналитическими формулами, которые даны в Приложении 4. Из формул (5.61) – (5.65) следует, что  $a(n_b)$  и  $c(n_b)$  равны:

$$a(n_b) = f_1^{\text{nn}}(n_b, 0) = f_1^{\text{pp}}(n_b, 0), \quad c(n_b) = f_1^{\text{np}}(n_b, 0). \quad (5.66)$$

Рассмотрим теперь чистое нейтронное вещество. В этом случае величины  $f_1^{\text{nn}}(n_b, 1)$  и  $F_1(n_b, 1)$  связаны посредством соотношения:

$$f_1^{\text{nn}}(n_b, 1) = \frac{F_1(n_b, 1)}{N_{0\text{n}}(n_b, 1)}. \quad (5.67)$$

Графики функции  $F_1(n_b, 1) \equiv F_1(k_{\text{Fpure}})$ , где  $k_{\text{Fpure}} = (3\pi^2 n_b)^{1/3}$ , построены для взаимодействий Reid v6 и VJ v6 на рисунках 20 и 22 статьи Джэксона и др. [53]. В Приложении 4 приведены аппроксимационные формулы для этой функции. Из (5.61) и (5.67) следует, что

$$b(n_b) = f_1^{\text{nn}}(n_b, 1) - a(n_b). \quad (5.68)$$

Итак, в предположении о линейной зависимости  $f_1^{\alpha\alpha'}$  от  $\delta$  мы можем вычислить параметры Ландау асимметричной ядерной материи, а следовательно, рассчитать матрицу сверхтекучих плотностей  $\rho_{\alpha\alpha'}$ .

Полученные результаты проиллюстрированы на рис. 5.1. На нем представлены величины  $\rho_{\alpha\alpha'}/\rho_\alpha$  ( $\alpha, \alpha' = \text{n}$  или  $\text{p}$ ) в зависимости от температуры  $T$  для двух моделей сильных взаимодействий: VJ v6 (сплошная линия) и Reid v6 (длинные штрихи). Концентрация барионов выбрана равной  $n_b = 3n_0$ , где  $n_0 = 0.16 \text{ фм}^{-3}$  – ядерная концентрация. При барионной концентрации

$n_b = 3n_0$  уравнение состояния Гейзельберга и Хйорт-Йенсена [32] для вещества, состоящего из нейтронов, протонов и электронов, дает:  $\delta = 0.837$ . Критические температуры нуклонов (при  $n_b = 3n_0$ ) выбраны равными:  $T_{cn} = 6 \times 10^8$  К,  $T_{cp} = 5 \times 10^9$  К. Этих данных достаточно, чтобы вычислить матрицу сверхтекучих плотностей для любой температуры. Подчеркнем, тем не менее, что наш подход не является самосогласованным. Строго говоря, уравнение состояния, параметры Ландау, а также нуклонные критические температуры необходимо вычислять пользуясь *одной моделью сильных взаимодействий*.

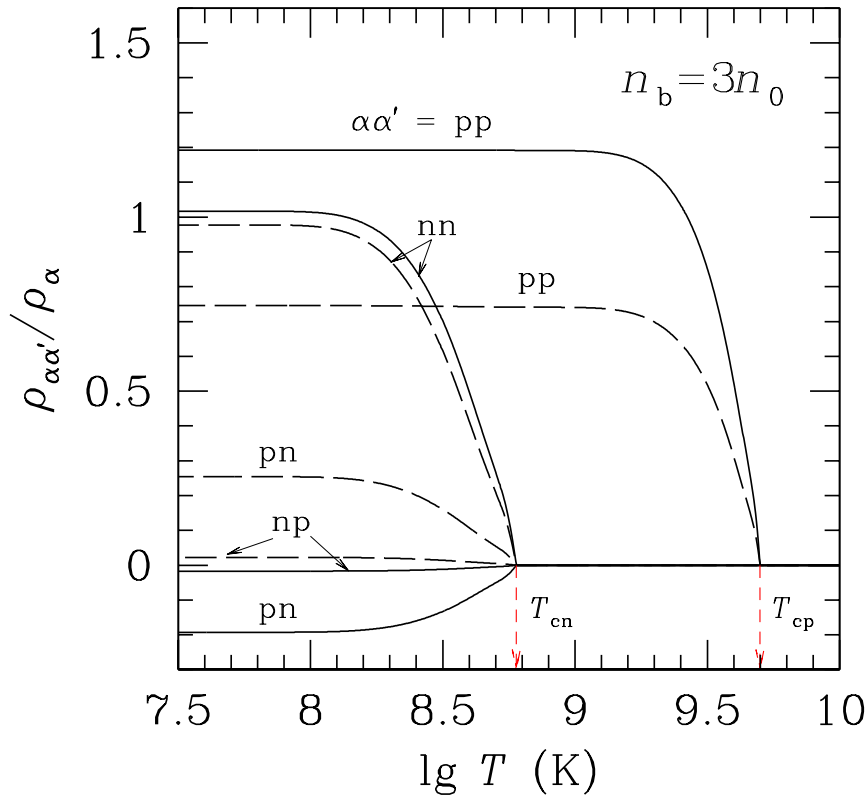


Рис. 5.1: Зависимость  $\rho_{\alpha\alpha'}/\rho_\alpha$  ( $\alpha, \alpha' = n$  или  $p$ ) от температуры  $T$  для двух потенциалов взаимодействия: VJ v6 (сплошная линия) и Reid v6 (штриховая линия) при концентрации барионов  $n_b = 3n_0$ . Вертикальными стрелками отмечены критические температуры протонов ( $T_{cp} = 5 \times 10^9$  К) и нейтронов ( $T_{cn} = 6 \times 10^8$  К).

При  $T \geq T_{cp}$  сверхтекучесть отсутствует и все элементы матрицы  $\rho_{\alpha\alpha'} = 0$ . При  $T_{cn} \leq T \leq T_{cp}$  протоны становятся сверхтекучими, поэтому  $\rho_{pp} \neq 0$ . На-

конец, при  $T < T_{\text{сн}}$ , сверхтекучи оба сорта частиц и все элементы  $\rho_{\alpha\alpha'}$  отличны от 0. С уменьшением  $T$  величины  $\rho_{\alpha\alpha'}$  быстро выходят на свои асимптотики, задаваемые формулами (5.52) и (5.53). Отметим, что величина  $\rho_{\text{pp}}/\rho_{\text{p}}$  существенно зависит от модели сильных взаимодействий (сплошные и штриховые кривые, помеченные символами pp сильно отличаются), а величины  $\rho_{\text{pn}}/\rho_{\text{p}}$  и  $\rho_{\text{np}}/\rho_{\text{n}}$  для двух типов взаимодействий различаются даже знаком ( $\rho_{\text{pn}} = \rho_{\text{np}} < 0$  для потенциала взаимодействия Reid v6, поскольку для него  $f_1^{\text{np}} < 0$ , см. формулу 5.53). Величина  $\rho_{\text{pp}}/\rho_{\text{p}}$ , вычисленная при  $T \rightarrow 0$ , равна  $\rho_{\text{pp}}/\rho_{\text{p}} \approx 1.19$  для потенциала взаимодействия VJ v6 и  $\rho_{\text{pp}}/\rho_{\text{p}} \approx 0.75$  для взаимодействия Reid v6. Последняя величина примерно в 2 раза меньше значения, полученного при оценке Борумандом и др. [22]:  $\rho_{\text{pp}}/\rho_{\text{p}} \approx 2$ .

## 5.5 Основные результаты пятой главы

В данной главе мы рассчитали матрицу сверхтекучих плотностей  $\rho_{\alpha\alpha'}$  для ненулевых температур. Расчет проведен в рамках теории ферми-жидкости Ландау, обобщенной Ларкиным и Мигдалом [90] и Леггеттом [97] на случай сверхтекучести. Полученные формулы проверены в двух предельных случаях, в которых эта матрица уже рассчитывалась в литературе (при нулевых температурах и при отсутствии взаимодействия между нейтронами и протонами).

Результаты представлены в форме, удобной для практического использования. В частности, необходимые для вычисления  $\rho_{\alpha\alpha'}$  параметры Ландау симметричной ядерной материи и чистого нейтронного вещества (взяты из статьи Джэксона и др. [53] для двух моделей сильных взаимодействий VJ v6 и Reid v6) аппроксимированы удобными аналитическими формулами. В то время как численные значения матричного элемента  $\rho_{\text{nn}}$  близки для обоих рассмотренных потенциалов сильных взаимодействий, а значения для  $\rho_{\text{pp}}$  отличаются приблизительно на тридцать процентов, гораздо меньшие недиагональные элементы  $\rho_{\text{np}}$  отличаются знаком. Ясно, что недиагональные элементы сверхтекучей матрицы весьма чувствительны к конкретному виду потенциала нуклон-нуклонного взаимодействия. Подчеркнем, что мы использовали значения параметров Ландау, полученные более двадцати лет

назад. Поэтому наши результаты должны быть пересмотрены как только станут доступны данные более современных расчетов параметров Ландау с  $l = 1$ . Такие расчеты могут быть проведены, например, при помощи метода ренормализационной группы (см., например, Швенк и др. [171]), примененного к чистому нейтронному веществу, к симметричному ядерному веществу и, возможно, к наиболее интересному для астрофизических приложений случаю асимметричной ядерной материи.

Обобщение матрицы сверхтекучих плотностей на случай, когда в плотном веществе существует три и более сорта барионов, тривиально и приводит лишь к увеличению числа индексов, по которым происходит суммирование во всех формулах (а также к изменению размерности матриц  $\rho$  и  $\gamma$ ).

Следует отметить, что в то время как *температурная зависимость* матрицы  $\rho_{\alpha\alpha'}$  [которая содержится целиком в универсальной функции  $\Phi_\alpha(T)$ ] известна достаточно надежно, этого нельзя сказать о параметрах Ландау.

Матрица  $\rho_{\alpha\alpha'}$  для ненулевых температур необходима при изучении кинетики вещества нейтронных звезд, а также при исследовании динамической эволюции нейтронных звезд, в частности их колебаний. Как мы показали, матрица сверхтекучих плотностей меняется с температурой. Поскольку матрица  $\rho_{\alpha\alpha'}$  входит в уравнения гидродинамики, которые определяют пульсации нейтронных звезд, частоты этих пульсаций должны зависеть от температуры и, следовательно (поскольку температура звезды изменяется), от времени. Измерение зависимости частоты пульсаций от времени дает потенциально мощный метод для изучения сверхплотного вещества нейтронных звезд (см. главу 6).

## ГЛАВА 6

### ТЕМПЕРАТУРНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ СПЕКТРА ПУЛЬСАЦИЙ СВЕРХТЕКУЧИХ НЕЙТРОННЫХ ЗВЕЗД

#### 6.1 Введение к главе 6

Матрица сверхтекучих плотностей, вычисленная для нейтрон-протонной смеси в предыдущей главе, с необходимостью возникает в гидродинамике сверхтекучих смесей, представленной в законченном виде в работе Андреева и Башкина [10]. Строго говоря, эта гидродинамика не может быть использована для исследования пульсирующих нейтронных звезд [49], поскольку является существенно нерелятивистской теорией (независимо от степени релятивизма нуклонов). Уравнения этой гидродинамики трудно непосредственно обобщить так, чтобы учесть эффекты общей теории относительности, важные в нейтронных звездах. Для того, чтобы произвести такой учет, необходимо использовать *релятивистски инвариантную* гидродинамику сверхтекучих смесей. Обобщение двухжидкостной модели Ландау (первоначально разработанной применительно к жидкому гелию II) на случай произвольного релятивизма было произведено Картером [73–75] на основе конвективного вариационного принципа, а также Халатниковым и Лебедевым [155] и Лебедевым и Халатниковым [93] на основе потенциального вариационного принципа. Полная эквивалентность обоих подходов в бездиссипативном пределе была продемонстрирована Картером и Халатниковым [76, 77]. На случай сверхтекучих смесей, в частности, вещества в нейтронных звездах, подход, связанный с конвективным вариационным принципом, распространили Картер и его соавторы (см., например, Ланглоис и др. [85], Картер и Ланглоис [78]). Уравнения гидродинамики, которые получаются из конвективного вариационного принципа, накладывают связи на "канонические" координаты

наты и импульсы. В эти уравнения входят различные феноменологические коэффициенты, связать которые с величинами, реально фигурирующими в микроскопической теории (например, со сверхтекучими плотностями), зачастую весьма затруднительно (хотя, в принципе, возможно). Поэтому мы не будем использовать этот мощный, но – на наш взгляд – не очень удобный для практических целей подход (хотя все предыдущие расчеты пульсаций сверхтекучих нейтронных звезд в общей теории относительности использовали именно его, см. Комер и др. [81], Андерссон и Комер [6], Андерссон и др. [7] и Йошида и Ли [62]). Вместо этого мы воспользуемся релятивистскими уравнениями гидродинамики сверхтекучей жидкости, сформулированными Соном [137] на основе микроскопической теории. Роль матрицы сверхтекучих плотностей  $\rho_{ik}$  в гидродинамике Соны играет матрица  $Y_{ik}$ , которая определенным образом связана с матрицей  $\rho_{ik}$  (раздел 6.2). Подход Соны, будучи слегка видоизменен, обладает тем существенным преимуществом, что позволяет легко интерпретировать разнообразные физические величины, входящие в уравнения гидродинамики. Тем не менее, можно показать, что его уравнения полностью эквивалентны гидродинамике Картера (см. Сон [137]).

Целью данной главы является исследование влияния конечных температур на пульсации сверхтекучих нейтронных звезд. Как будет показано ниже, в диапазоне температур  $T \sim (0.1 - 1)T_{\text{сн}}$  это влияние может быть существенным, поскольку матрица  $Y_{ik}$  в этом случае сильно изменяется и не может считаться постоянной. Это, в свою очередь, влияет на уравнения гидродинамики сверхтекучих смесей и, тем самым, на спектр собственных частот. Для простоты мы проанализируем радиальные пульсации сверхтекучей нейтронной звезды. При этом мы рассмотрим простейшую одножидкостную модель коры нейтронной звезды, вещество которой является нормальным. Мы будем предполагать, что ядро нейтронной звезды состоит из нейтронов, протонов и электронов, причем нуклоны обоих сортов могут быть сверхтекучими.

Отметим, что во всех предшествующих расчетах глобальных колебаний сверхтекучих нейтронных звезд рассматривалось приближение нулевых температур. Такое предположение представляется нам идеализированным по двум причинам. Во-первых, даже изначально холодная звезда в ходе коле-



баний может быть нагрета за счет перехода пульсационной энергии в тепло (благодаря, например, вязкой диссипации, см. главу 4). Во-вторых, критические температуры нуклонов зависят от плотности вещества (зависимость эта имеет вид колокола, то есть с повышением плотности критическая температура сначала растет, а затем, после достижения максимума, начинает уменьшаться, см., например, рис. 1.7); при любой заданной температуре  $T$  обычно найдется область в нейтронной звезде, в которой  $T \sim T_{\text{сн}}$ .

Глава построена следующим образом. В разделе 6.2 мы обобщим уравнения Сона [137] на случай сверхтекучих смесей и перепишем их в переменных, делающих использование этих уравнений наиболее удобным в приложениях. В разделе 6.3 мы рассмотрим равновесные конфигурации нейтронных звезд. В разделе 6.4 мы рассмотрим уравнения, описывающие радиальные колебания сверхтекучих звезд с учетом конечной температуры в их ядрах. Здесь также будут получены граничные условия, которые необходимо наложить на пульсационные уравнения. В разделе 6.5 будут изучены коротковолновые решения этих уравнений – звук в сверхтекучих нейтронных звездах. В разделе 6.6 мы проанализируем результаты решения пульсационных уравнений и получим зависимость спектра собственных частот пульсаций от температуры, а также (с учетом тепловой эволюции звезды) – от времени. В разделе 6.7 будут приведены выводы и обсуждены будущие задачи, которые необходимо решить.

## 6.2 Релятивистские уравнения бездиссипативной гидродинамики сверхтекучей смеси

В этом разделе кратко рассмотрим основные уравнения бездиссипативной гидродинамики сверхтекучей жидкости. Мы будем использовать результаты работы Сона [137], который предложил релятивистские уравнения, описывающие однокомпонентную сверхтекучую жидкость при ненулевой температуре. Мы обобщим эти уравнения на случай многокомпонентных смесей и перепишем их в виде, более удобном для конкретных приложений. Для наглядности будем рассматривать смесь, состоящую из трех сортов  $l$  частиц, причем будем считать, что частицы двух сортов сверхтекучи, а частицы

третьего сорта находятся в нормальном состоянии. Например, в нейтронных звездах сверхтекучими могут быть нейтроны ( $l = n$ ) и/или протоны ( $l = p$ ), а электроны ( $l = e$ ) нормальны.

Как известно (см., например, Халатников [156]), в сверхтекучем веществе возможны движения с несколькими независимыми скоростями, причем такие движения не приводят к диссипации энергии. В случае смеси из двух сверхтекучих веществ и одного нормального вещества (хотя, в принципе, нормальных составляющих может быть сколько угодно), система полностью определяется заданием трех 4-скоростей  $u^\mu$ ,  $w_{(n)}^\mu$ , и  $w_{(p)}^\mu$ . Последние две скорости возникают благодаря дополнительным степеням свободы, связанным с наличием сверхтекучести. Скоростью  $u^\mu$  обладают электроны, а также "нормальная" часть нейтронов и протонов (нейтронные и протонные боголюбовские возбуждения).

При наличии нескольких независимых движений в жидкости возникает вопрос о том, какая система отсчета является собственной, то есть в какой системе отсчета определяются основные термодинамические величины: объемная плотность энергии  $\varepsilon$  и концентрации частиц  $n_l$  ( $l = n, p, e$ ). Без ограничения общности можно считать, что собственной является та система отсчета, в которой скорость  $u^\mu = (1, 0, 0, 0)$ . Это накладывает определенные условия на 4-ток частиц  $j_{(l)}^\mu$  и тензор энергии-импульса  $T^{\mu\nu}$ . А именно, должны выполняться следующие равенства:

$$u_\mu j_{(l)}^\mu = -n_l, \quad u_\mu u_\nu T^{\mu\nu} = \varepsilon. \quad (6.1)$$

Полная система уравнений гидродинамики сверхтекучих смесей, удовлетворяющая условиям (6.1), имеет вид:

$$d\varepsilon = T dS + \mu_i dn_i + \mu_e dn_e + \frac{Y_{ik}}{2} d(w_{(i)}^\alpha w_{(k)\alpha}), \quad (6.2)$$

$$j_{(l); \mu}^\mu = 0, \quad j_{(i)}^\mu = n_i u^\mu + Y_{ik} w_{(k)}^\mu, \quad j_{(e)}^\mu = n_e u^\mu, \quad (6.3)$$

$$T_{; \mu}^{\mu\nu} = 0, \quad T^{\mu\nu} = (P + \varepsilon) u^\mu u^\nu + P g^{\mu\nu} + Y_{ik} \left( w_{(i)}^\mu w_{(k)}^\nu + \mu_i w_{(k)}^\mu u^\nu + \mu_k w_{(i)}^\nu u^\mu \right), \quad (6.4)$$

$$u_\mu w_{(i)}^\mu = 0. \quad (6.5)$$

Здесь и далее индексы  $i$  и  $k$  относятся к нуклонам:  $i, k = n, p$ . Если не

оговорено особо, по дважды встречающимся индексам  $i, k, \alpha, \mu, \nu$  подразумевается суммирование. Равенство (6.2) представляет собой второй закон термодинамики для сверхтекучих смесей; уравнения (6.3)–(6.4) – закон сохранения числа частиц и энергии-импульса, соответственно. Наконец, уравнение (6.5) описывает поведение сверхтекучей компоненты. Это уравнение является непосредственным следствием условий (6.1).

В формулах (6.2)–(6.5)  $g^{\mu\nu}$  – метрический тензор;  $S$  – энтропия единицы объема;  $\mu_l$  – химический потенциал частиц сорта  $l = n, p, e$ ;  $P$  – давление, которое мы определяем так же, как и для несверхтекучего вещества:

$$P = -\varepsilon + \mu_i n_i + \mu_e n_e + TS. \quad (6.6)$$

Наконец,  $Y_{ik} = Y_{ki}$  – симметричная матрица размерности  $2 \times 2$ , элементы которой являются функциями температуры  $T$  и концентрации нейтронов и протонов. Используя формулы (6.2) и (6.6), получаем соотношение Гиббса-Дюрема для сверхтекучих смесей:

$$dP = S dT + n_i d\mu_i + n_e d\mu_e - \frac{Y_{ik}}{2} d \left( w_{(i)}^\alpha w_{(k)\alpha} \right). \quad (6.7)$$

Из требования постоянства полной энтропии системы следует, что на 4-скорости  $w_{(i)}^\mu$  должно быть наложено дополнительное условие. Мы получим правильные уравнения гидродинамики, описывающие идеальную сверхтекучую смесь, если выберем величины  $w_{(i)}^\mu$  в виде:

$$w_{(i)}^\mu = \frac{\partial \phi_i}{\partial x_\mu} - q_i A^\mu - \mu_i u^\mu. \quad (6.8)$$

Здесь  $\phi_i$  – произвольная скалярная функция;  $A^\mu$  – 4-потенциал электромагнитного поля;  $q_i$  – электрический заряд нуклона сорта  $i$ . Нетрудно убедиться, что беря  $w_{(i)}^\mu$  в форме (6.8), из формул (6.2)–(6.5) получается уравнение непрерывности для энтропии:

$$(S u^\mu)_{;\mu} = 0. \quad (6.9)$$

Видно, что энтропия переносится с той же скоростью  $u^\mu$ , что и нормальная часть жидкости (иными словами, энтропия сверхтекучей части жидкости равна 0).

Выясним теперь физический смысл величин  $\phi_i$ ,  $u^\mu$  и  $Y_{ik}$ . Для этого посмотрим, как они связаны в нерелятивистском пределе со сверхтекучей скоростью  $V_{is}$ , нормальной скоростью  $V_{qp}$ , фазой конденсатной волновой функции  $\Phi_i$  и матрицей сверхтекучих плотностей  $\rho_{ik}$  (более подробно об этих величинах, возникающих в нерелятивистской гидродинамике сверхтекучих смесей, см. Андреев и Башкин [10]). Можно показать, что справедливы следующие соотношения:

$$\mathbf{V}_{is} = \frac{1}{m_i} (\nabla \phi_i - q_i \mathbf{A}), \quad \nabla \phi_i = \frac{\hbar}{2} \nabla \Phi_i, \quad (6.10)$$

$$\mathbf{V}_{qp} = \mathbf{u}, \quad Y_{ik} = Y_{ki} = \frac{\rho_{ik}}{m_i m_k}. \quad (6.11)$$

Здесь и далее мы используем систему единиц, в которой скорость света  $c = 1$ .

Остановимся подробнее на некоторых свойствах матрицы  $Y_{ik}$ . В случае, когда сверхтекучесть отсутствует, то есть когда температура вещества  $T$  больше, чем критические температуры нейтронов  $T_{cn}$  и протонов  $T_{cp}$ , имеем  $Y_{ik} = 0$ . При этом выражение для 4-тока нуклонов (6.3) и для тензора энергии-импульса (6.4) приобретает стандартный вид и описывает идеальную несверхтекучую релятивистскую жидкость (см., например, Ландау и Лифшиц [89]). Если, например, выполняется неравенство  $T_{cn} < T < T_{cp}$ , то есть сверхтекучи только протоны, то единственным отличным от нуля компонентом матрицы  $Y_{ik}$  является матричный элемент  $Y_{pp}$ . Если же  $T = 0$ , то *все* нейтроны и протоны образуют куперовские пары. Это означает, что не существует нуклонов, движущихся со скоростью  $u^\mu$ , то есть с нормальной частью жидкости. Поэтому ток  $j_{(i)}^\mu$  не зависит от  $u^\mu$  и мы приходим к условию вида (см. формулы 6.3, 6.8):

$$\mu_k Y_{ik}(T = 0) = n_i. \quad (6.12)$$

К сожалению, в общем случае произвольных температур матрица  $Y_{ik}$  в литературе не рассчитывалась. Тем не менее, в главе 5 проведен расчет сверхтекучей матрицы  $\rho_{ik}(T)$ . Как уже говорилось выше, в нерелятивистском пределе матрицы  $Y_{ik}$  и  $\rho_{ik}$  связаны соотношением (6.11). Поэтому в дальнейшем мы будем использовать приближенное выражение для матрицы  $Y_{ik}$ , которое в нерелятивистском пределе переходит в формулу (6.11) и в тоже

время удовлетворяет условию (6.12):

$$Y_{np} = Y_{pn} = \frac{\rho_{np}}{m_n m_p}, \quad Y_{nn} = \frac{\rho_{nn} + \rho_{np} - m_n \mu_p Y_{np}}{m_n \mu_n}, \quad Y_{pp} = \frac{\rho_{pp} + \rho_{pn} - m_p \mu_n Y_{pn}}{m_p \mu_p}. \quad (6.13)$$

Условие (6.12) может быть получено из этой формулы, если принять во внимание, что при  $T = 0$  должны соблюдаться равенства (5.54).

### 6.3 Равновесные конфигурации сверхтекучих нейтронных звезд

Применим формулы раздела 6.2 к нейтронным звездам. Как и в главе 4, для простоты рассмотрим невращающуюся нейтронную звезду. В этом и следующем разделах мы будем часто ссылаться на результаты, полученные Чандрасекаром [166] в его пионерской работе, посвященной радиальным пульсациям несверхтекучих звезд в общей теории относительности.

Метрика сферически симметричной звезды, совершающей радиальные движения, имеет вид (4.1):

$$ds^2 = -e^\nu dt^2 + r^2 d\Omega^2 + e^\lambda dr^2, \quad (6.14)$$

где  $r$  и  $t$  – радиальная и временная координаты;  $d\Omega$  – элемент телесного угла (в сферической системе координат с началом в центре звезды). Функции  $\nu$  и  $\lambda$  зависят только от  $r$  и  $t$ . Ниже величины, относящиеся к невозмущенной звезде, будем отличать индексом "0". В частности, метрические функции невозмущенной стационарной звезды обозначим как  $\nu_0(r)$  и  $\lambda_0(r)$ .

В гидростатически равновесной звездной конфигурации измеряемые физические величины (в частности, концентрации частиц) не зависят от времени. Из уравнения непрерывности для электронов (6.3) и из определения 4-скорости нормальной части жидкости

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{ds} \quad (6.15)$$

в этом случае имеем:

$$u^0 = e^{-\nu_0/2}, \quad u^1 = u^2 = u^3 = 0. \quad (6.16)$$

Далее, из уравнений непрерывности для нейтронов и протонов (6.3) следует:

$$w_{(i)}^1 = w_{(i)}^2 = w_{(i)}^3 = 0 \quad (6.17)$$

Наконец, принимая во внимание формулу (6.16), из уравнения (6.5) получаем:

$$w_{(i)}^0 = 0. \quad (6.18)$$

Из формул (6.16)–(6.18) видно, что в равновесии тензор энергии-импульса (6.4) сверхтекучей звезды выглядит точно так же, как для несверхтекучей звезды. Поэтому все формулы, описывающие гидростатическое равновесие несверхтекучих звезд, подходят и к нашему случаю. В частности, справедливо уравнение (см., например, формулу 21 статьи Чандрасекара [166]):

$$\frac{dP_0}{dr} = -\frac{1}{2} (P_0 + \varepsilon_0) \frac{d\nu_0}{dr}. \quad (6.19)$$

Новая информация может быть получена из уравнения (6.18). Записывая его для нейтронов и используя определение (6.8), получаем:

$$\frac{\partial \phi_{n0}}{\partial t} = -\mu_{n0} e^{\nu_0/2}. \quad (6.20)$$

С другой стороны, в силу (6.16) и (6.17), имеем:

$$\frac{\partial \phi_{n0}}{\partial r} = 0. \quad (6.21)$$

Из (6.20) и (6.21) следует:

$$\frac{d}{dr} \left( \mu_{n0} e^{\nu_0/2} \right) = 0. \quad (6.22)$$

Подчеркнем, что использование условий (6.17) и (6.18) применительно к протонам не дало бы ограничения типа (6.22) на  $\mu_{p0}$ , поскольку выражение (6.8) для протонов зависит дополнительно от 4-потенциала электромагнитного поля. Связью между  $A^\mu$  и  $\mu_{p0}$ , которую можно получить из формул (6.17) и (6.18), мы в дальнейшем интересоваться не будем.

Предполагая, что для равновесной звезды выполняется условие квазинейтральности  $n_{e0} = n_{p0}$ , из формул (6.6) и (6.7) получаем:

$$P_0 + \varepsilon_0 = \mu_{n0} n_{b0} + \delta\mu_0 n_{p0} + T_0 S_0, \quad (6.23)$$

$$\frac{dP_0}{dr} = n_{b0} \frac{d\mu_{n0}}{dr} + n_{p0} \frac{d\delta\mu_0}{dr} + S_0 \frac{dT_0}{dr}. \quad (6.24)$$

Здесь  $n_{b0} \equiv n_{n0} + n_{p0}$  — концентрация барионов;  $\delta\mu_0 \equiv \mu_{p0} + \mu_{e0} - \mu_{n0}$ . С другой стороны, подставляя выражение для  $d\nu_0/dr$  из (6.22) в формулу (6.19) и учитывая (6.23), имеем:

$$\frac{dP_0}{dr} = n_{b0} \frac{d\mu_{n0}}{dr} - \frac{1}{2} (\delta\mu_0 n_{p0} + T_0 S_0) \frac{d\nu_0}{dr}. \quad (6.25)$$

Сравнивая формулы (6.24) и (6.25), убеждаемся, что:

$$n_{p0} \frac{d}{dr} \left( \delta\mu_0 e^{\nu_0/2} \right) + S_0 \frac{d}{dr} \left( T_0 e^{\nu_0/2} \right) = 0. \quad (6.26)$$

Подчеркнем, что при получении этой формулы предполагалось, что звезда находится в гидростатическом равновесии (но не обязательно в тепловом, диффузионном или бета-равновесии). Поэтому можно ожидать, что условие (6.26) устанавливается за характерное время достижения звездой гидростатического равновесия.

Из формулы (6.26) следует, что если некоторая область в звезде (в которой нейтроны сверхтекучи) находится в тепловом равновесии,

$$\frac{d}{dr} \left( T_0 e^{\nu_0/2} \right) = 0, \quad (6.27)$$

то она находится и в диффузионном равновесии (и наоборот). Действительно, как следует из формул (6.22) и (6.26), в этом случае имеем:

$$\frac{d}{dr} \left( \mu_{n0} e^{\nu_0/2} \right) = 0, \quad \frac{d}{dr} \left[ (\mu_{p0} + \mu_{e0}) e^{\nu_0/2} \right] = 0. \quad (6.28)$$

Эти равенства, описывающие систему, находящуюся в диффузионном равновесии, стандартны (см., например, Ландау и Лифшиц [88]). Второе из равенств (6.28) есть не что иное, как сумма условий диффузионного равновесия для протонов и электронов. В каждое из этих условий входит электростатический потенциал, который самосогласованно определяется из требования квазинейтральности. Мы не будем находить здесь этот потенциал; после сложения условий диффузионного равновесия для протонов и электронов он сократится.

В этой главе мы предполагали, что невозмущенная звезда находится в состоянии гидростатического и бета-равновесия. В этом частном случае из формулы (6.26) сразу получаем условие теплового равновесия (6.27). Мы

приходим к выводу, что градиент температур (с учетом красного смещения) не может существовать в той области гидростатически и бета-равновесной звезды, в которой есть сверхтекучие нейтроны. Ситуация в этом случае полностью аналогична тому, что наблюдается в чистом гелии II (см., например, Халатников [156]). Отметим, что сверхтекучесть протонов не накладывает ограничений типа (6.27) на градиент температур.

#### 6.4 Радиальные пульсации сверхтекучих нейтронных звезд

В этом разделе мы рассмотрим звезду, на которую наложены малые радиальные возмущения. Соответственно, во всех уравнениях мы будем учитывать только линейные по возмущениям члены. Кроме того, мы будем использовать гипотезу замороженного ядерного состава, то есть будем полностью пренебрегать влиянием бета-процессов на химический состав ядер нейтронных звезд в ходе их пульсаций. Такое предположение оправдано, если частоты радиальных колебаний звезды  $\omega \gg 1/\tau$ , где  $\tau$  – характерное время выравнивания равновесия по бета-процессам. Наконец, мы будем предполагать соблюдение условия квазинейтральности в колеблющейся звезде:

$$n_e = n_p, \quad (6.29)$$

так как собственные частоты  $\omega$  много меньше плазменной частоты электронов  $\omega_{pe}$ . Здесь и далее величины без индекса "0" относятся к возмущенной звезде. Если буква  $A$  обозначает физическую величину в возмущенной звезде, а  $A_0$  в невозмущенной, то  $\delta A \equiv A - A_0$  обозначает возмущение величины  $A$ .

Условие квазинейтральности приводит к равенству 4-тока электронов и протонов:

$$j_{(e)}^\mu = j_{(p)}^\mu. \quad (6.30)$$

Подставляя сюда выражения для токов (6.3), получаем:

$$Y_{pk} w_{(k)}^\mu = 0. \quad (6.31)$$

В дальнейшем нам понадобится уравнение непрерывности для барионов, которое можно найти, складывая вместе уравнения непрерывности (6.3) для



протонов и нейтронов. Принимая во внимание формулу (6.31), получаем:

$$\left( n_b u^\mu + Y_{nk} w_{(k)}^\mu \right)_{;\mu} = 0. \quad (6.32)$$

#### 6.4.1 Основные уравнения

Используя метрику (6.14), в линейном приближении по малым возмущениям для 4-скорости  $u^\mu$  можно записать:

$$u^0 = e^{-\nu/2}, \quad u^1 = e^{-\nu_0/2} v, \quad u^2 = u^3 = 0, \quad (6.33)$$

где  $v \equiv dr/dt$  – скорость движения нормальной части вещества в радиальном направлении (следует обратить внимание на опечатку в аналогичной формуле 25 работы Чандрасекара [166]: вместо  $\nu_0$  в выражении для  $u^0$  и  $u_0$  должно стоять  $\nu$ ). Учитывая формулу (6.33), из уравнения (6.5) немедленно получаем:

$$w_{(i)}^0 = 0. \quad (6.34)$$

Кроме того, поскольку движения могут происходить только в радиальном направлении, имеем:

$$w_{(i)}^2 = w_{(i)}^3 = 0. \quad (6.35)$$

Таким образом, ненулевые компоненты тензора энергии-импульса равны:

$$T_0^0 = -\varepsilon, \quad T_1^1 = T_2^2 = T_3^3 = P, \quad (6.36)$$

$$T_0^1 = -(P_0 + \varepsilon_0) v + \Delta T_0^1, \quad (6.37)$$

$$T_1^0 = e^{\lambda_0 - \nu_0} (P_0 + \varepsilon_0) v - e^{\lambda_0 - \nu_0} \Delta T_0^1. \quad (6.38)$$

От случая нормального вещества эти формулы отличаются только членом  $\Delta T_0^1$ , который равен (см. формулу 6.4):

$$\Delta T_0^1 = \mu_{k0} Y_{ik} u_0 w_{(i)}^1 = -\mu_{n0} Y_{ni} w_{(i)}^1 e^{\nu_0/2}, \quad (6.39)$$

При написании последнего равенства мы воспользовались условием квазинейтральности (6.31), а также равенством  $u_0 = -e^{\nu/2}$  (из уравнения 6.5 следует, что  $w_{(i)}^1 \sim v$ , поэтому в формуле 6.39 можно заменить  $\nu$  на  $\nu_0$ ). Отметим одно важное обстоятельство, следующее из (6.39). Если нейтроны в

звезде нормальны (то есть  $Y_{ni} = 0$ ), то ее колебания будут *неотличимы* от колебаний обычной несверхтекучей звезды независимо от того, сверхтекучи протоны или нет.

Рассмотрим уравнение (6.34) для нейтронов. Используя формулу (6.8), его можно переписать в виде:

$$-e^{-\nu} \frac{\partial \phi_n}{\partial t} - \mu_n e^{-\nu/2} = 0. \quad (6.40)$$

Подставляя в формулу (6.40)  $\nu = \nu_0 + \delta\nu(r, t)$ ,  $\phi_n = \phi_{n0} + \delta\phi_n(r, t)$ ,  $\mu_n = \mu_{n0} + \delta\mu_n(r, t)$  и используя уравнения (6.20) и (6.21), получаем:

$$\frac{\partial \delta\phi_n}{\partial t} = - \left( \delta\mu_n + \frac{1}{2} \mu_{n0} \delta\nu \right) e^{\nu_0/2}. \quad (6.41)$$

С другой стороны, с точностью до линейных по возмущению членов:

$$w_{(n)}^1 = e^{-\lambda} \frac{\partial \phi_n}{\partial r} - \mu_n u^1 = e^{-\lambda_0} \frac{\partial \delta\phi_n}{\partial r} - \mu_{n0} e^{-\nu_0/2} v. \quad (6.42)$$

Комбинируя формулы (6.41) и (6.42), находим:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( e^{\lambda_0} w_{(n)}^1 + \mu_{n0} e^{\lambda_0 - \nu_0/2} v \right) = - \frac{\partial}{\partial r} \left( \delta\mu_n e^{\nu_0/2} + \frac{1}{2} \mu_{n0} e^{\nu_0/2} \delta\nu \right). \quad (6.43)$$

Введем новые переменные  $z_i$  и  $\xi$  согласно равенствам (суммирование по  $i$  здесь не производится!):

$$w_{(i)}^1 = \mu_{i0} e^{-\nu_0/2} \frac{\partial z_i}{\partial t}, \quad (6.44)$$

$$v = \frac{\partial \xi}{\partial t}. \quad (6.45)$$

Интегрируя по времени условие (6.31), получаем связь между переменными  $z_n$  и  $z_p$ :

$$\mu_{k0} Y_{pk} z_k = 0. \quad (6.46)$$

Теперь, предполагая что все возмущения зависят от времени как  $e^{i\omega t}$ , уравнение (6.43) можно переписать в виде:

$$\mu_{n0} e^{\lambda_0 - \nu_0/2} \omega^2 (z_n + \xi) = \frac{\partial}{\partial r} \left( \delta\mu_n e^{\nu_0/2} + \frac{1}{2} \mu_{n0} e^{\nu_0/2} \delta\nu \right). \quad (6.47)$$

Мы получили одно из уравнений, описывающих колебания релятивистской сверхтекучей звезды. Аналог этого уравнения для несверхтекучих звезд не существует. Чтобы полностью определить неизвестные собственные функции  $z_i$  и  $\xi$  и спектр частот, надо найти второе пульсационное уравнение. В принципе, для этого необходимо решить уравнения Эйнштейна с тензором энергии-импульса (6.36)–(6.38). Ситуацию, однако, существенно упрощает тот факт, что этот тензор энергии-импульса принципиально не отличается от тензора, использованного Чандрасекаром [166] при анализе пульсаций несверхтекучей звезды (см. его формулы 27 и 28). Поэтому мы можем воспользоваться результатами его работы. Обобщая вывод Чандрасекара на наш случай, получаем следующие выражения для величин  $\delta\lambda$ ,  $\delta\varepsilon$  и  $\partial\delta\nu/\partial r$ :

$$\delta\lambda = \tilde{T}_0^1 \frac{1}{P_0 + \varepsilon_0} \frac{d}{dr} (\lambda_0 + \nu_0), \quad (6.48)$$

$$\delta\varepsilon = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tilde{T}_0^1), \quad (6.49)$$

$$\frac{\partial\delta\nu}{\partial r} = \frac{1}{P_0 + \varepsilon_0} \left[ \delta P + \left( \frac{d\nu_0}{dr} + \frac{1}{r} \right) \tilde{T}_0^1 \right] \frac{d}{dr} (\lambda_0 + \nu_0). \quad (6.50)$$

Здесь величина  $\tilde{T}_0^1$  определена равенством:

$$T_0^1 = \frac{\partial\tilde{T}_0^1}{\partial t} \quad (6.51)$$

и равна (см. формулы 6.37, 6.39, 6.44 и 6.45):

$$\tilde{T}_0^1 = - (P_0 + \varepsilon_0) \xi - \mu_{n0} \mu_{i0} Y_{ni} z_i. \quad (6.52)$$

Формулы (6.48)–(6.50) являются обобщением соответствующих выражений (36), (37) и (41) статьи Чандрасекара [166]. Пульсационное уравнение (43) из его работы в нашем случае переписется в виде:

$$\begin{aligned} -e^{\lambda_0 - \nu_0} \omega^2 \tilde{T}_0^1 &= \frac{\partial\delta P}{\partial r} + \delta P \frac{d}{dr} \left( \frac{1}{2} \lambda_0 + \nu_0 \right) \\ &+ \frac{1}{2} \delta\varepsilon \frac{d\nu_0}{dr} + \frac{1}{2} \tilde{T}_0^1 \left( \frac{d\nu_0}{dr} + \frac{1}{r} \right) \frac{d}{dr} (\lambda_0 + \nu_0). \end{aligned} \quad (6.53)$$

Уравнения (6.47) и (6.53) полностью описывают радиальные колебания сверхтекучих нейтронных звезд. Нам осталось лишь найти неизвестные величины  $\delta P$  и  $\delta\mu_n$ , входящие в эти уравнения.

### 6.4.2 Определение функций $\delta P$ и $\delta\mu_n$

Учитывая условие квазинейтральности, которое соблюдается в колеблющейся нейтронной звезде, любую термодинамическую величину (в ядре нейтронной звезды, состоящем из нейтронов, протонов и электронов) можно представить как функцию трех термодинамических переменных, например,  $n_b$ ,  $n_e$  и  $S$  (мы пренебрегаем квадратично малой зависимостью термодинамических величин от  $w_{(i)}^\alpha w_{(i)\alpha}$ ). Поскольку колебания предполагаются малыми, давление  $P(n_b, n_e, S) = P_0 + \delta P$  и химический потенциал нейтронов  $\mu_n(n_b, n_e, S) = \mu_{n0} + \delta\mu_n$  можно разложить в ряд вблизи их равновесных значений и представить функции  $\delta P$  и  $\delta\mu_n$  в виде:

$$\delta P = \frac{\partial P(n_{b0}, n_{e0}, S_0)}{\partial n_{b0}} \delta n_b + \frac{\partial P(n_{b0}, n_{e0}, S_0)}{\partial n_{e0}} \delta n_e + \frac{\partial P(n_{b0}, n_{e0}, S_0)}{\partial S_0} \delta S, \quad (6.54)$$

$$\delta\mu_n = \frac{\partial \mu_n(n_{b0}, n_{e0}, S_0)}{\partial n_{b0}} \delta n_b + \frac{\partial \mu_n(n_{b0}, n_{e0}, S_0)}{\partial n_{e0}} \delta n_e + \frac{\partial \mu_n(n_{b0}, n_{e0}, S_0)}{\partial S_0} \delta S. \quad (6.55)$$

Определим величины  $\delta n_b$ ,  $\delta n_e$  и  $\delta S$  из уравнений непрерывности для числа барионов (6.32), электронов (6.3) и для энтропии (6.9). Раскрывая ковариантную производную в метрике (6.14) и оставляя только линейные по возмущениям члены, уравнение непрерывности для числа барионов (6.32) можно переписать в виде:

$$\begin{aligned} & e^{-\nu_0/2} \frac{\partial \delta n_b}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 n_{b0} e^{-\nu_0/2} v \right) + \frac{1}{2} n_{b0} e^{-\nu_0/2} \frac{\partial \delta \lambda}{\partial t} \\ & + \frac{1}{2} n_{b0} e^{-\nu_0/2} v \frac{d}{dr} (\lambda_0 + \nu_0) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 Y_{nk} w_{(k)}^1 \right) \\ & + \frac{1}{2} Y_{nk} w_{(k)}^1 \frac{d}{dr} (\lambda_0 + \nu_0) = 0. \end{aligned} \quad (6.56)$$

Интегрируя это уравнение по  $t$  и принимая во внимание формулы (6.44), (6.45), (6.48), а также равенство (6.23), получаем:

$$\delta n_b = -\frac{e^{\nu_0/2}}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 n_{b0} e^{-\nu_0/2} \xi \right) - \frac{e^{\nu_0/2}}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \mu_{k0} Y_{nk} z_k e^{-\nu_0/2} \right). \quad (6.57)$$

Выражения для  $\delta n_e$  и  $\delta S$  получаются аналогично:

$$\delta n_e = -\frac{e^{\nu_0/2}}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 n_{e0} e^{-\nu_0/2} \xi \right), \quad (6.58)$$

$$\delta S = -\frac{e^{\nu_0/2}}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 S_0 e^{-\nu_0/2} \xi \right). \quad (6.59)$$

Формулы (6.57)–(6.59) являются обобщением формулы (50) статьи Чандraseкара [166]. Обратим внимание, что равенство (6.57) может быть переписано в более компактном виде. Домножая обе его части на  $\mu_{n0}$  и используя формулы (6.22), (6.23), (6.27), (6.49), а также определение (6.52), находим:

$$\mu_{n0} \delta n_b = \delta \varepsilon - T_0 \delta S. \quad (6.60)$$

Это есть просто второй закон термодинамики (6.2), написанный с учетом условий квазинейтральности ( $n_{e0} = n_{p0}$ ) и бета-равновесия ( $\delta \mu_0 = 0$ ), справедливых в равновесной звезде.

Подставляя формулы (6.57)–(6.59) в (6.54) и (6.55), после стандартных преобразований получаем:

$$\delta P = -\frac{dP_0}{dr} \xi - \gamma_1 P_0 \Phi - \beta_1 P_0 \Psi, \quad (6.61)$$

$$\delta \mu_n = -\frac{d\mu_{n0}}{dr} \xi - \gamma_2 \mu_{n0} \Phi - \beta_2 \mu_{n0} \Psi, \quad (6.62)$$

где мы определили:

$$\Phi = \frac{e^{\nu_0/2}}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \xi e^{-\nu_0/2} \right), \quad \Psi = \frac{e^{\nu_0/2}}{n_{b0} r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \mu_{k0} Y_{nk} z_k e^{-\nu_0/2} \right), \quad (6.63)$$

$$\gamma_1 = \frac{n_{b0}}{P_0} \frac{\partial P(n_{b0}, x_{e0}, x_{s0})}{\partial n_{b0}}, \quad \gamma_2 = \frac{n_{b0}}{\mu_{n0}} \frac{\partial \mu_n(n_{b0}, x_{e0}, x_{s0})}{\partial n_{b0}}, \quad (6.64)$$

$$\beta_1 = \frac{n_{b0}}{P_0} \frac{\partial P(n_{b0}, n_{e0}, S_0)}{\partial n_{b0}}, \quad \beta_2 = \frac{n_{b0}}{\mu_{n0}} \frac{\partial \mu_n(n_{b0}, n_{e0}, S_0)}{\partial n_{b0}}. \quad (6.65)$$

Здесь  $x_{e0} \equiv n_{e0}/n_{b0}$ ,  $x_{s0} \equiv S_0/n_{b0}$ . Обратим внимание, что частные производные в формуле (6.64) берутся при постоянных значениях  $x_{e0}$  и  $x_{s0}$ . Введенный параметр  $\gamma_1$  – обычный адиабатический индекс вещества, встречающийся в теории пульсаций несверхтекучих звезд. При расчете частных производных от термодинамических величин можно пренебречь влиянием температурных эффектов и всюду положить  $S_0 = 0$ ,  $x_{s0} = 0$ .

Итак, мы определили функции  $\delta\mu_n$  и  $\delta P$  в предположении "замороженного" состава вещества в ядрах нейтронных звезд. Все конкретные вычисления мы проводили именно в этом предположении. Тем не менее, сделаем несколько замечаний о том, как следовало бы рассчитывать эти функции в другом предельном случае, когда  $\omega \ll 1/\tau$  (вещество звезды в каждый момент времени находится в состоянии бета-равновесия). В этом случае давление  $P$  и химический потенциал нейтронов  $\mu_n$  являются функциями только величин  $n_b$  и  $S$ , а концентрация электронов  $n_e(n_b, S)$  определяется из условия бета-равновесия. Используя выражения (6.57) и (6.59), можно записать:

$$\delta P = \frac{\partial P(n_{b0}, S_0)}{\partial n_{b0}} \delta n_b + \frac{\partial P(n_{b0}, S_0)}{\partial S_0} \delta S, \quad (6.66)$$

$$\delta\mu_n = \frac{\partial \mu_n(n_{b0}, S_0)}{\partial n_{b0}} \delta n_b + \frac{\partial \mu_n(n_{b0}, S_0)}{\partial S_0} \delta S. \quad (6.67)$$

Если мы теперь пренебрежем зависимостью термодинамических величин от энтропии (что оправданно для "замороженного" ядерного состава), то придем к качественно неверному результату, лишившись одной из ветвей спектра пульсаций. Действительно, в этом случае пульсационное уравнение (6.53) зависит только от одной собственной функции  $\tilde{T}_0^1$  (см. формулы 6.66, 6.60 и 6.49). Поэтому собственные частоты пульсаций могут быть определены уже из одного уравнения (6.53) независимо от второго пульсационного уравнения (6.47) [Как будет видно из раздела 6.4.3, граничные условия к пульсационным уравнениям 6.47 и 6.53 также позволяют сформулировать условия только на собственную функцию  $\tilde{T}_0^1$ ]. Полученная ветвь спектра будет практически совпадать со спектром несверхтекучей звезды, а специфические моды колебаний, присущие только сверхтекучим звездам, исчезнут. Отметим, что подобные "температурные" моды колебаний в существующей литературе не рассматривались.

### 6.4.3 Граничные условия

Пульсационные уравнения (6.47) и (6.53), дополненные формулами (6.46), (6.49), (6.50), (6.52), (6.61) и (6.62), позволяют однозначно определить неизвестные функции  $z_n$ ,  $z_p$ ,  $\xi$  и спектр частот при условии, что заданы граничные условия.

Для определения граничных условий уточним формулировку модельной задачи, которую мы собираемся решать. Будем считать, что нейтроны в звезде являются сверхтекучими внутри шара радиуса  $R_0$ , причем  $R_0 \leq R_{cc}$ , где  $R_{cc}$  – координата границы, разделяющей кору и ядро. Вне шара вещество предполагается нормальным. Будем обозначать величины, относящиеся к внешней несверхтекучей части звезды, буквой "с".

На поверхности звезды имеем стандартное граничное условие ( $R$  – радиус невозмущенной звезды,  $\xi_c$  – лагранжево смещение несверхтекучего вещества в коре):

$$P_c(R + \xi_c(R)) = 0, \quad (6.68)$$

которое можно переписать в виде:

$$\left[ \delta P_c + \frac{dP_0}{dr} \xi_c \right]_{r=R} = 0. \quad (6.69)$$

При получении этой формулы из (6.68) мы воспользовались определением:  $P_c(R) \equiv P_0(R) + \delta P_c$ . В центре звезды производные по  $r$  должны быть конечными. Поэтому необходимо, чтобы существовали конечные пределы:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \xi/r < \infty, \quad \lim_{r \rightarrow 0} z_i/r < \infty. \quad (6.70)$$

Остальные граничные условия должны быть сформулированы на границе сверхтекучая – нормальная фаза. Должно выполняться три условия. Прежде всего, ток электронов на границе должен быть непрерывен. Из формулы (6.58) следует, что при этом непрерывно лагранжево смещение "нормальных" частиц:

$$\xi(R_0) = \xi_c(R_0). \quad (6.71)$$

Кроме того, должны быть непрерывны потоки импульса и энергии через поверхность раздела двух фаз. Эти условия приводят к равенствам (см. формулы 6.36 – 6.38 с учетом определений 6.45 и 6.52):

$$P(R_0 + \xi(R_0)) = P_c(R_0 + \xi_c(R_0)), \quad (6.72)$$

$$[(P_0 + \varepsilon_0) \xi + \mu_{n0} \mu_{i0} Y_{ni} z_i]_{r=R_0} = [(P_0 + \varepsilon_0) \xi_c]_{r=R_0}. \quad (6.73)$$

Принимая во внимание формулу (6.71), равенства (6.72) и (6.73) переписываются в виде:

$$[\delta P - \delta P_c]_{r=R_0} = 0, \quad (6.74)$$

$$\mu_{i0} Y_{ni} z_i |_{r=R_0} = 0. \quad (6.75)$$

Формулами (6.69), (6.70), (6.71), (6.74) и (6.75) исчерпываются все граничные условия, которые необходимо наложить на уравнения (6.47) и (6.53) для нахождения спектра частот в рамках выбранной модели нейтронной звезды.

## 6.5 Звук в сверхтекучих смесях

Прежде чем приступить к изложению результатов решения пульсационных уравнений (6.47) и (6.53), рассмотрим звуковые колебания в сверхтекучих нейтронных звездах. Очевидно, строгое решение этих уравнений будет напоминать звуковую волну, если число узлов  $N$  собственных функций  $\xi$  и  $z_i$  на радиусе звезды велико, так что волновое число звуковой волны  $k \sim N/R \gg 1/R$ . Принимая во внимание, что при этом  $\omega/k \sim u$ , где  $u$  – скорость звука, приходим к выводу, что собственные частоты таких "звуковых" колебаний должны удовлетворять неравенству:

$$\omega \gg u/R. \quad (6.76)$$

Упростим уравнения (6.47) и (6.53) для случая звуковых колебаний. Поскольку характерный масштаб  $R$ , на котором изменяются равновесные величины (помеченные индексом "0"), много больше, чем характерный масштаб  $1/k$ , на котором изменяются собственные функции колебаний, то можно пренебречь пространственными производными по равновесным величинам и переписать пульсационные уравнения в виде:

$$\mu_{n0} e^{\lambda_0 - \nu_0} \omega^2 (z_n + \xi) = \frac{\partial \delta \mu_n}{\partial r}, \quad (6.77)$$

$$-e^{\lambda_0 - \nu_0} \omega^2 \tilde{T}_0^1 = \frac{\partial \delta P}{\partial r}. \quad (6.78)$$

В предположении замороженного ядерного состава функции  $\delta P$  и  $\delta \mu_n$  по-



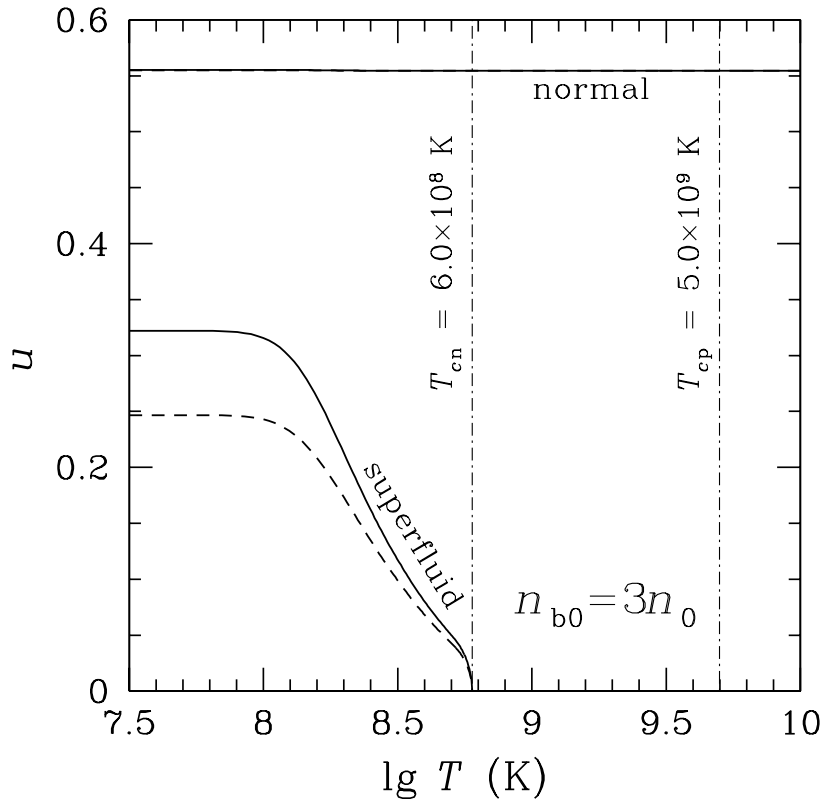


Рис. 6.1: Скорости звука  $u_{1,2}$  (в единицах  $c$ ) как функции температуры  $T$  для двух модельных потенциалов нуклон-нуклонных взаимодействий ВJ  $\nu 6$  (сплошные линии) и Reid  $\nu 6$  (штрихи). Графики зависимости  $u_1(T)$  и  $u_2(T)$  помечены "normal" и "superfluid", соответственно. Критические температуры нейтронов и протонов показаны вертикальными штрих-пунктирными линиями. Концентрация барионов равна  $n_{b0} = 3n_0 = 0.48 \text{ fm}^{-3}$ .

прежнему определяются формулами (6.61) и (6.62), однако теперь:

$$\Phi = \frac{\partial \xi}{\partial r}, \quad \Psi = \frac{\mu_{k0} Y_{nk}}{n_{b0}} \frac{\partial z_k}{\partial r}. \quad (6.79)$$

Функции  $\xi$  и  $z_i$  будем искать в виде:

$$\xi = \xi_0(r) e^{i(kr - \omega t)}, \quad z_i = z_{i0}(r) e^{i(kr - \omega t)}. \quad (6.80)$$

Производными от плавно меняющихся функций  $\xi_0(r)$  и  $z_{i0}(r)$  можно пренебречь. Подставляя выражения (6.80) в уравнения (6.77) и (6.78), из условия совместности получившейся системы уравнений находим биквадратное

уравнение на локальную скорость звука  $u = e^{(\lambda_0 - \nu_0)/2} \omega/k$ :

$$y u^4 + \left[ \frac{P_0}{\mu_{n0} n_{b0}} (\beta_1 - \gamma_1 - \gamma_1 y) + \gamma_2 - \beta_2 \right] u^2 + \frac{P_0}{\mu_{n0} n_{b0}} (\beta_2 \gamma_1 - \beta_1 \gamma_2) = 0. \quad (6.81)$$

Это уравнение имеет два нетривиальных решения, соответствующих двум возможным скоростям распространения звука. Безразмерная величина  $y$  определена следующим образом:

$$y = \frac{Y_{pp} n_{b0}}{\mu_{n0} (Y_{nn} Y_{pp} - Y_{np} Y_{pn})} - 1. \quad (6.82)$$

При  $T \rightarrow T_{cn}$ , имеем  $Y_{nn}, Y_{np}, Y_{pn} \rightarrow 0$ , следовательно  $y \approx n_{b0}/(\mu_{n0} Y_{nn}) \rightarrow \infty$ .

В этом случае корни уравнения (6.81) приближенно равны:

$$u_1 \approx \sqrt{\frac{P_0 \gamma_1}{\mu_{n0} n_{b0}}}, \quad u_2 \approx \sqrt{\frac{\mu_{n0} Y_{nn}}{n_{b0} \gamma_1} (\beta_2 \gamma_1 - \beta_1 \gamma_2)}. \quad (6.83)$$

Первый корень определяет скорость распространения возмущений, аналогичных обычному звуку в веществе с несверхтекучими нейтронами. Второй корень указывает на существование дополнительной моды колебаний, специфической для сверхтекучего вещества. Для устойчивости относительно образования этой моды, необходимо, чтобы  $\beta_2 \gamma_1 \geq \beta_1 \gamma_2$ . Вторая мода колебаний исчезает при  $T > T_{cn}$  ( $Y_{nn} = Y_{np} = Y_{pn} = 0$ ), в то время как скорость первой моды по-прежнему задается формулой (6.83). Первая мода в этом случае – обычный звук.

Результаты точного решения уравнения (6.81) для вещества с концентрацией барионов  $n_{b0} = 3n_0$  приведены на рисунке 6.1. Мы выбрали критические температуры нейтронов и протонов равными,  $T_{cn} = 6 \times 10^8$  К и  $T_{cp} = 5 \times 10^9$  К. При расчете термодинамических величин и их производных мы использовали уравнение состояния Гейзельберга и Хйорт-Йенсена [32]. Для двух модельных потенциалов нуклон-нуклонного взаимодействия ВJ v6 (сплошные линии) и Reid v6 (штрихи) на рисунке построены скорости  $u_{1,2}$  (в единицах  $c$ ) в зависимости от температуры  $T$ . От выбора модели нуклон-нуклонного взаимодействия зависит сверхтекучая матрица  $\rho_{ik}$ , а следовательно, и матрица  $Y_{ik}$ , см. работу Гусакова и Хэнсела [43], а также оригинальную статью Джэксона и др. [53]. Кривые, соответствующие  $u_2(T)$ , помечены "superfluid", а кривые, соответствующие  $u_1(T)$  помечены "normal".

Видно, что скорость звука  $u_1(T)$  практически не зависит от модели нуклон-нуклонного взаимодействия (штриховая и сплошная линии совпадают).

Из анализа рисунка 6.1 следует, что результаты точного решения уравнения (6.81) в целом согласуются с основными выводами, сделанными нами выше. Обратим внимание, что скорость звука  $u_1$  даже при  $T \ll T_{\text{сн}}$  фактически не отличается от скорости, задаваемой формулой (6.83). Кроме того, важно, что в отличие от чистого гелия II, при малых температурах скорость распространения колебаний  $u_2$  становится сравнимой со скоростью  $u_1$ . При  $T < T_{\text{сн}}$  скорость  $u_2$  быстро выходит на свое асимптотическое значение  $u_2(T = 0)$ .

Теперь кратко рассмотрим звук в бета-равновесном веществе. Как нетрудно убедиться, в этом случае все формулы этого раздела остаются справедливыми, если термодинамические величины и их производные понимать как функции *только* барионной концентрации  $n_{\text{b}0}$  и энтропии  $S_0$  (напомним, что в этом случае концентрация электронов  $n_{\text{e}0}$  не является независимой переменной и сама определяется из условия бета-равновесия). Например, адиабатический индекс теперь равен:  $\gamma_1 = (n_{\text{b}0}/P_0) \partial P(n_{\text{b}0}, x_{\text{s}0})/\partial n_{\text{b}0}$ .

Переходя от переменных  $n_{\text{b}0}$  и  $x_{\text{s}0}$  в функциях  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  к переменным  $n_{\text{b}0}$  и  $S_0$  и выражая везде в уравнении (6.81) производные  $\partial \mu_{\text{n}}(n_{\text{b}0}, S_0)/\partial n_{\text{b}0}$  и  $\partial \mu_{\text{n}}(n_{\text{b}0}, S_0)/\partial S_0$  пользуясь вторым законом термодинамики  $dP = S_0 dT + n_{\text{b}0} d\mu_{\text{n}}$ , получаем:

$$y u^4 - \frac{1}{\mu_{\text{n}0} n_{\text{b}0}} \left( S_0^2 \frac{\partial T}{\partial S_0} + y n_{\text{b}0} \frac{\partial P}{\partial n_{\text{b}0}} + S_0 y \frac{\partial P}{\partial S_0} \right) u^2 + \frac{S_0^2}{\mu_{\text{n}0}^2 n_{\text{b}0}} \left( \frac{\partial P}{\partial n_{\text{b}0}} \frac{\partial T}{\partial S_0} - \frac{\partial P}{\partial S_0} \frac{\partial T}{\partial n_{\text{b}0}} \right) = 0. \quad (6.84)$$

Приближенное решение этого уравнения может быть легко найдено, если учесть, что в данном случае всегда  $u_1 \gg u_2$ . Решения имеют вид:

$$u_1 \approx \sqrt{\frac{1}{\mu_{\text{n}0}} \frac{\partial P}{\partial n_{\text{b}0}}}, \quad u_2 \approx \sqrt{\frac{S_0^2}{\mu_{\text{n}0} n_{\text{b}0} y} \frac{\partial T}{\partial S_0}}. \quad (6.85)$$

Опять, первый корень описывает распространение возмущений со скоростью звука в несверхтекущем бета-равновесном веществе (первый звук), а

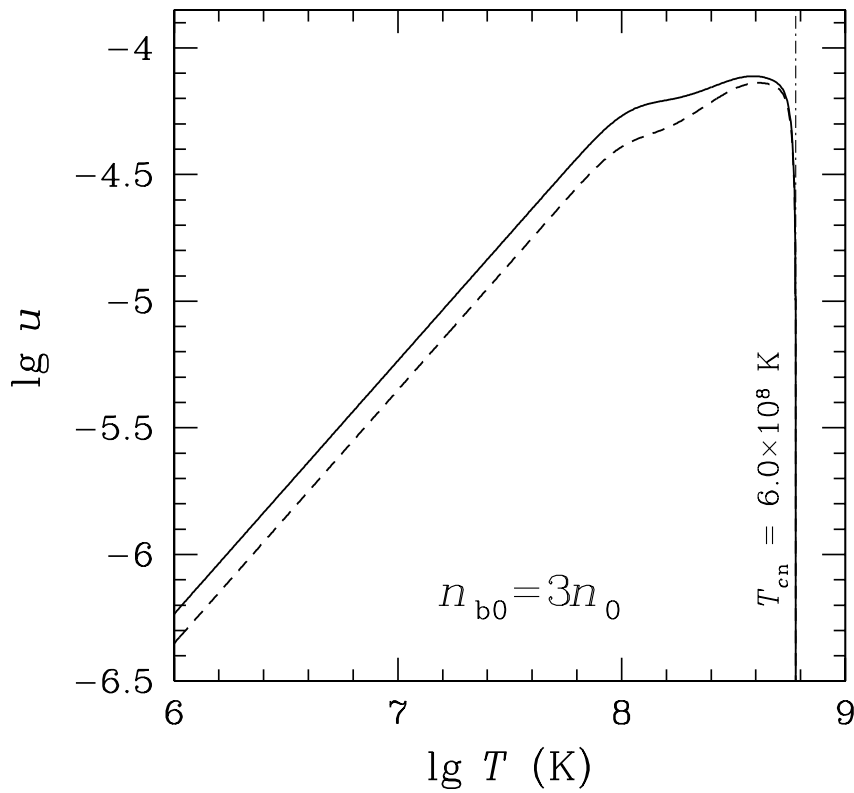


Рис. 6.2: Скорость второго звука  $u_2$  бета-равновесного вещества (в единицах  $c$ ) как функция температуры  $T$  для тех же моделей нуклон-нуклонного взаимодействия, сверхтекучести нейтронов и протонов и концентрации барионов  $n_{b0}$ , что и на рисунке 6.1. Все обозначения такие же.

второй корень определяет скорость так называемого второго звука. Следует отметить, что в данном случае первый звук фактически не может распространяться со скоростью  $u_1$ , определяемой формулой (6.85), поскольку скорость  $u_1$  настолько высока, что ни о каком бета-равновесии в такой волне не может быть и речи. Если в формуле (6.85) считать, что звук распространяется в среде из частиц одного сорта, то в нерелятивистском пределе выражение для скорости  $u_2$  совпадает с выражением для скорости второго звука в жидком гелии II (см., например, Халатников [156]).

Зависимость  $u_2(T)$  (скорость  $u_2$  приведена в единицах  $c$ ) для вещества с концентрацией барионов  $n_{b0} = 3n_0$  построена на рисунке 6.2. При этом использовались те же модели сверхтекучести, нуклон-нуклонного взаимодей-

ствия и то же уравнение состояния, что и при рассмотрении звука в веществе с замороженным ядерным составом. Для численного расчета скорости звука мы использовали формулу:  $C = T \partial S / \partial T$ , где  $C$  – полная теплоемкость сверхтекучего вещества, выражение для которой можно найти, например, в обзоре Яковлева и др. [176].

Из формулы (6.85) и из рисунка 6.2 следует, что скорость  $u_2$  обращается в ноль как при  $T = T_{\text{сн}}$ , так и при  $T = 0$ . Однако при малых температурах бета-процессы настолько подавлены, что распространение второго звука фактически невозможно. Вещество не будет успевать приходить в состояние бета-равновесия за время, сравнимое с периодом колебаний. Поэтому единственно возможной областью, в которой второй звук определенно может существовать, является область  $T \lesssim T_{\text{сн}}$ .

Подытоживая, приходим к выводу, что в сверхтекучем веществе возможно существование звуковых волн трех типов. Волны двух типов обладают настолько большими скоростями, что распространяются только в веществе с "замороженным" ядерным составом, в то время как волна третьего типа может существовать только в бета-равновесном веществе в узкой области температур вблизи нейтронной критической температуры  $T_{\text{сн}}$ .

## 6.6 Результаты для радиальных пульсаций

Перейдем к анализу результатов решения пульсационных уравнений (6.47) и (6.53). Численное интегрирование этих уравнений совершенно стандартно и проводилось методом Рунге-Кутты. Мы использовали уравнение состояния Негеля и Вотрэна [113] в коре и уравнение состояния Гейзельберга и Хйорт-Йенсена [32] в ядре звезды. Последнее уравнение состояния является удобной аналитической аппроксимацией уравнения состояния Акмаля и Пандхарипанде [2] (см. главу 4). Максимальная масса устойчивой нейтронной звезды, допускаемая принятым уравнением состояния, равна:  $M = M_{\text{max}} = 1.92 M_{\odot}$ ; окружный радиус такой звезды  $R = 10.3$  км, центральная плотность  $\rho_c = 2.76 \times 10^{15}$  г см<sup>-3</sup>. Прямой урка-процесс открыт в ядрах звезд с массой  $M > 1.83 M_{\odot}$ . При расчете матрицы  $Y_{ik}$ , мы использовали параметры Ландау для модели нуклон-нуклонных взаимодействий ВJ

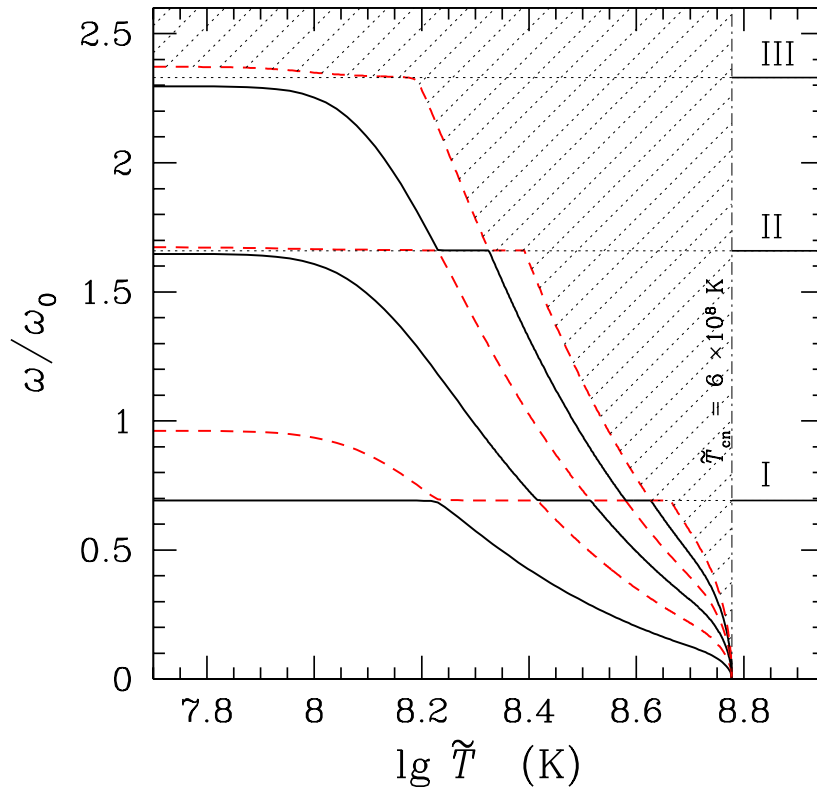


Рис. 6.3: Собственные частоты колеблющейся нейтронной звезды  $\omega$  (в единицах  $\omega_0 = c/R$ ) в зависимости от температуры ядра звезды  $\tilde{T}$  с учетом красного смещения. Критическая температура нейтронов  $\tilde{T}_{\text{cn}}$  показана вертикальной штрих-пунктирной линией. Горизонтальные точечные линии, переходящие в сплошные линии при  $\tilde{T} > \tilde{T}_{\text{cn}}$ , указывают на первые три собственных частоты (I, II, III) колебаний несверхтекучей звезды. В заштрихованной области спектр не строился. Штрихами показаны кривые, соответствующие "сверхтекучим" модам при  $\tilde{T} \ll \tilde{T}_{\text{cn}}$ , сплошными линиями показаны кривые, соответствующие "нормальным" модам при  $\tilde{T} \ll \tilde{T}_{\text{cn}}$  (см. текст).

в6 (см. главу 5, а также Приложение 4).

Для иллюстрации мы выбрали модель нейтронной звезды с массой  $M = 1.4M_{\odot}$  ( $R = 12.17$  км,  $\rho_c = 9.26 \times 10^{14}$  г см $^{-3}$ ). Радиальная координата границы кора-ядро составляет  $R_{\text{cc}} = 10.88$ . Частоты первых трех мод радиальных колебаний несверхтекучей звезды с такой массой равны:  $\omega_1 = 1.703 \times 10^4$  с $^{-1}$ ,  $\omega_2 = 4.081 \times 10^4$  с $^{-1}$ ,  $\omega_3 = 5.732 \times 10^4$  с $^{-1}$ .

Чтобы уменьшить число факторов, влияющих на спектр пульсаций, рассмотрим упрощенную модель сверхтекучести, в которой критические температуры нуклонов с учетом гравитационного красного смещения не зависят от плотности и равны:  $\tilde{T}_{\text{cn}} \equiv T_{\text{cn}} e^{\nu_0/2} = 6 \times 10^8 \text{ K}$ ,  $\tilde{T}_{\text{cp}} \equiv T_{\text{cp}} e^{\nu_0/2} = 5 \times 10^9 \text{ K}$ . В этом случае область, занятая сверхтекучими частицами, совпадает с ядром нейтронной звезды:  $R_0 = R_{\text{cc}}$ . Как показали результаты тестов, приближение постоянных по ядру критических температур  $\tilde{T}_{\text{cn,p}}$  хорошо описывает реальную ситуацию при не слишком резкой зависимости критических температур от плотности, что имеет место для некоторых микроскопических моделей сверхтекучести нуклонов (см, например, Яковлев и др. [176], Паж и др. [121]).

На рисунке 6.3 представлена зависимость собственных частот пульсирующей нейтронной звезды  $\omega$  в единицах  $\omega_0 = c/R$  от температуры ядра звезды  $\tilde{T} = T_0 e^{\nu_0/2}$  с учетом красного смещения (напомним, что в силу формулы 6.27 ядро сверхтекучей звезды можно считать изотермичным). Вертикальной штрих-пунктирной линией помечена критическая температура нейтронов  $\tilde{T}_{\text{cn}}$ . Горизонтальные точечные линии показывают первые три частоты  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  и  $\omega_3$  из спектра колебаний несверхтекучей звезды. В заштрихованной области спектр не строился. При  $\tilde{T} > \tilde{T}_{\text{cn}}$  вещество независимо от сверхтекучести протонов колеблется как единое целое. Соответственно, в спектре частот присутствуют только моды колебаний нормальной звезды, не зависящие от температуры (на рисунке первые три моды колебаний I, II и III показаны сплошными линиями). При  $\tilde{T} \ll \tilde{T}_{\text{cn}}$  колеблющаяся звезда может быть описана в приближении нулевых температур. Спектр холодной сверхтекучей звезды удваивается по сравнению со спектром нормальной звезды. Наряду с "нормальными" модами колебаний, частоты которых близки к частотам колебаний несверхтекучей звезды (сплошные линии), в спектре такой звезды присутствуют также специфические "сверхтекучие" моды (штрихи). Отметим, что уже частоты второй и третьей сверхтекучей моды практически не отличаются от соответствующих частот нормальной звезды (см. рис. 6.3).

С ростом температуры, начиная от  $\tilde{T} \sim 10^8 \text{ K}$ , частоты каждой моды

начинают уменьшаться. При этом при достижении одной из точечных горизонтальных линий поведение моды резко изменяется. На какое то время она перестает зависеть от температуры, имитируя поведение одной из колебательных мод несверхтекучей звезды. При дальнейшем увеличении температуры частота более высокой моды приближается к частоте рассматриваемой моды, которая снова начинает уменьшаться. Таким образом, пересечение двух ветвей спектра, отвечающих различным модам, никогда не происходит. Мы приходим к выводу, что с ростом температуры одна и та же мода может вести себя попеременно то как "сверхтекучая", то как "нормальная" мода.

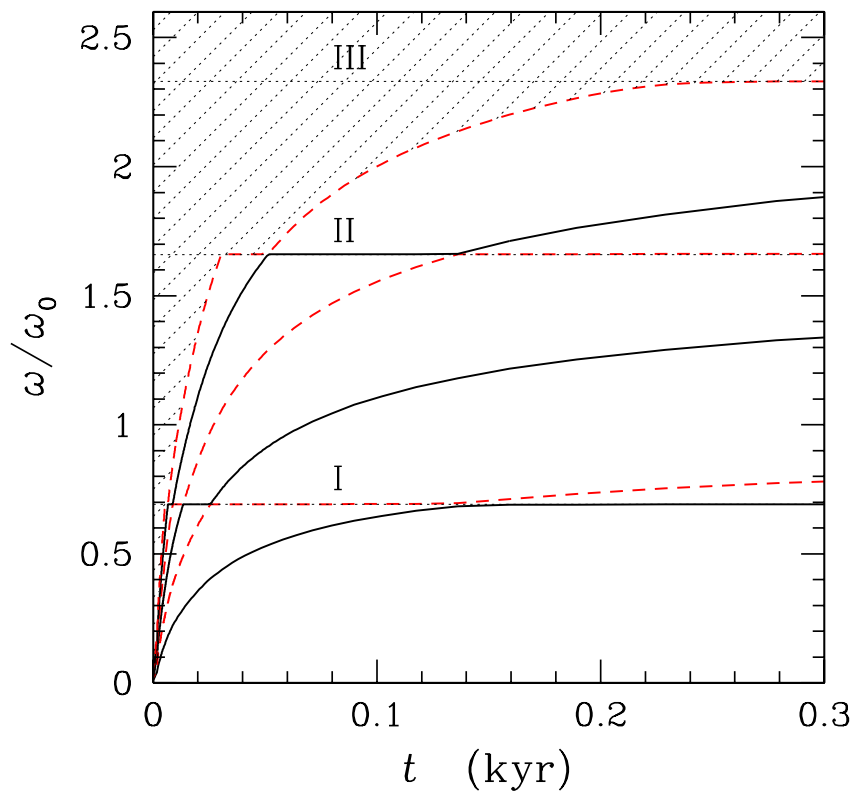


Рис. 6.4: Зависимость спектра пульсирующей сверхтекучей нейтронной звезды от времени  $t$ , прошедшего с момента перехода нейтронов в состояние сверхтекучести (когда  $\tilde{T} = \tilde{T}_{cn}$ ). Время  $t$  выражено в единицах  $10^3$  лет. Все обозначения такие же, как и на рисунке 6.3.

Интересно поведение спектра частот при температурах, близких к  $\tilde{T}_{cn}$ .



Как следует из рисунка 6.3, частота любой моды при  $\tilde{T} = \tilde{T}_{\text{cn}}$  обращается в ноль. Это не удивительно, если принять во внимание, что высокие моды пульсаций должны напоминать звук (см. раздел 6.5), а частота специфически "сверхтекучего" звука также обращается в ноль в точке перехода в сверхтекучее состояние (см. рис. 6.1). Может показаться, что вблизи точки перехода, когда все нейтроны в звезде практически нормальны, в спектре звезды отсутствуют частоты, отвечающие колебаниям несверхтекучих звезд. Это не так. Дело в том, что при  $\tilde{T} \rightarrow \tilde{T}_{\text{cn}}$  число мод, имеющих частоты в любом заданном интервале, например, в интервале  $[0, \omega_1]$ , становится сколь угодно большим. Это приводит к тому, что для любой температуры  $\tilde{T}$  и для любой частоты из спектра нормальной звезды существует мода, которая в данный момент является "нормальной", то есть обладает той же частотой.

Поскольку с течением времени температура нейтронных звезд изменяется, интересно рассмотреть вопрос о том, как частоты пульсирующих звезд зависят от времени. Будем предполагать, что пульсационная энергия звезды много меньше, чем ее тепловая энергия. В этом случае можно пренебречь нагревом звезды за счет перехода пульсационной энергии в тепло. Звезда будет остывать и для определения зависимости внутренней температуры  $\tilde{T}$  от времени  $t$  необходимо воспользоваться теорией остывания сверхтекучих нейтронных звезд (см., например, Яковлев и др. [176], Яковлев и Петик [183]).

Так как прямой урка-процесс запрещен для исследуемой модели нейтронной звезды с массой  $M = 1.4M_{\odot}$ , то основными механизмами остывания (при  $\tilde{T} < \tilde{T}_{\text{cn}}$ ) будут процесс излучения нейтрино при куперовском спаривании нейтронов, излучение нейтрино при нейтрон-нейтронных столкновениях и остывание за счет фотонного излучения с поверхности звезды. Решая уравнение теплового баланса (см., например, Яковлев и др. [176]) в предположении изотермичности внутренних слоев нейтронной звезды, легко найти зависимость  $\tilde{T}(t)$ . Зная функции  $\omega(\tilde{T})$  и  $\tilde{T}(t)$ , можно построить спектр частот  $\omega$  как функцию времени  $t$  (см. рис 6.4). На рисунке (6.4) время (в единицах  $10^3$  лет) отсчитывается от момента перехода нейтронов в сверхтекучее состояние (когда  $\tilde{T} = \tilde{T}_{\text{cn}}$ ); все обозначения имеют тот же смысл, что и на рисунке 6.3.

Из анализа рисунка 6.4 видно, что уже за первые 20 лет собственные частоты пульсаций меняются очень сильно, что связано с большой скоростью остывания за счет излучения нейтрино при куперовском спаривании нейтронов (подробное рассмотрение влияния этого процесса на остывание нейтронных звезд дано в главе 2). Например, частота третьей "сверхтекучей" моды за это время изменяется от 0 до собственной частоты  $\omega_2$  несверхтекучей звезды. С течением времени процесс нейтринного излучения при куперовском спаривании нейтронов быстро ослабляется. При этом остывание замедляется, а зависимость  $\omega(t)$  становится более плавной. Подчеркнем, что столь быстрое изменение собственных частот колеблющейся звезды в течение первых нескольких десятков лет обусловлено выбранной критической температурой нейтронов  $\tilde{T}_{\text{cn}} = 6 \times 10^8$  К. Рассматривая более низкие критические температуры, мы бы могли сделать зависимость  $\omega(t)$  значительно более плавной.

## 6.7 Основные результаты шестой главы

В данной главе рассмотрены колебания сверхтекучих нейтронных звезд при отличных от нуля температурах в их ядрах. При этом использовались уравнения однокомпонентной сверхтекучей гидродинамики, предложенные Соном [137]. Эти уравнения были переписаны в более удобных для приложений переменных и обобщены на случай сверхтекучих смесей с учетом эффектов общей теории относительности. На примере простейшей модели нуклонного вещества звезды показано, что необходимым условием гидростатического равновесия бета-равновесной нейтронной звезды является постоянство температуры (с учетом красного смещения) в той части звезды, в которой нейтроны сверхтекучи:  $Te^{\nu_0/2} = \text{constant}$ . Подчеркнем, что сверхтекучесть протонов *не* накладывает никаких ограничений на температуру, поскольку протоны "сцеплены" с нормальными электронами электромагнитными силами и в этом смысле всегда ведут себя как нормальная жидкость независимо от того, сверхтекучи они или нет.

При помощи уравнений гидродинамики сверхтекучих смесей исследованы радиальные пульсации нейтронных звезд. При этом предполагалось, что

вещество коры звезды является несверхтекучим, а в ядре звезды рассматривалось приближение постоянных (с учетом гравитационного красного смещения) критических температур нейтронов и протонов. Получена система пульсационных уравнений, которые описывают колебания вещества в сверхтекучем ядре звезды.

Найдены коротковолновые решения этой системы уравнений – звук в сверхтекучем веществе нейтронных звезд. Исследована зависимость скорости звука от температуры вещества в двух предельных режимах колебаний: в режиме, в котором условие бета-равновесия соблюдается в каждый момент времени и в режиме колебаний вещества с "замороженным" ядерным составом. Показано, что принципиально возможно существование трех ветвей звуковых волн, две из которых могут распространяться лишь в веществе с "замороженным" ядерным составом, а третья ветвь может существовать лишь в бета-равновесном веществе. Скорости звука в волнах первых двух типов сравнимы друг с другом и со скоростью звука в обычном несверхтекучем веществе (см. рис 6.1). Скорость звука третьего типа на 4–5 порядков меньше (см. рис 6.2). Звук третьего типа может распространяться лишь при температурах  $T$  несколько ниже  $T_{\text{сн}}$ .

В общем случае уравнения колебаний звезды рассчитывались численно. Результаты показали, что эффекты конечной внутренней температуры звезды существенно влияют на спектр пульсаций в интервале  $T \sim (0.1 - 1)T_{\text{сн}}$  (см. рис. 6.3). С ростом температуры в этом интервале частота любой пульсационной моды уменьшается. Однако, достигая одной из частот из спектра несверхтекучей звезды, эта мода на какое то время перестает зависеть от температуры, имитируя поведение несверхтекучей моды. При  $T \rightarrow T_{\text{сн}}$  все собственные частоты сверхтекучей звезды стремятся к нулю. При температурах  $T \lesssim 0.1T_{\text{сн}}$ , спектр практически не отличается от спектра пульсаций, полученного в приближении нулевых внутренних температур.

Помимо анализа температурной зависимости спектра, в работе рассмотрен также вопрос о том, как собственные частоты меняются со временем вследствие остывания нейтронной звезды (см. рис. 6.4). При этом использовалась стандартная теория остывания сверхтекучих нейтронных звезд с

изотермическим ядром. Расчет показал, что существенное (в рамках выбранной модели нейтронной сверхтекучести) изменение собственных частот пульсаций происходит в течение первых 20 лет с момента перехода нейтронов в сверхтекучее состояние. Столь малые (для теории остывания) времена связаны с резким охлаждением звезды за счет эффективного процесса излучения нейтрино при куперовском спаривании нейтронов. Эти времена будут еще меньше если в звезде открыт мощный прямой урка-процесс.

В данной главе нами был сделан ряд упрощений. В частности, мы рассмотрели простейшие радиальные колебания в невращающейся звезде, причем использовали приближение постоянных по ядру звезды критических температур. Интересно и важно рассмотреть вопрос о том, как конечные внутренние температуры влияют на спектры частот нерадиальных колебаний, а также как влияет на результаты рассмотрение более реалистичных зависимостей критических температур от плотности. Наконец, при более строгом подходе, особенно если речь идет о модах колебаний, локализованных в поверхностных слоях звезды, необходимо учитывать  $^1S_0$  сверхтекучесть нейтронов в коре звезды и вообще более аккуратно рассматривать физику коры. Несмотря на большую упрощенность рассмотренной модельной задачи, ясно, что эффекты конечных температур существенно влияют на спектры пульсаций не слишком холодных сверхтекучих нейтронных звезд. При этом частоты пульсаций могут сильно изменяться на временах порядка нескольких десятков лет, что делает эти изменения потенциально наблюдаемыми.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Данная работа посвящена исследованию остывания и пульсаций сверхтекучих нейтронных звезд. Основные результаты диссертации сводятся к следующему:

1. Рассчитаны факторы подавления нейтринного излучения для модифицированного урка-процесса и процессов нуклон-нуклонного рассеяния совместной синглетной сверхтекучестью протонов и триплетной сверхтекучестью нейтронов с проекцией полного момента куперовской пары на ось квантования  $|m_J| = 0$  или 2. Полученные результаты совместно с результатами, известными в литературе, позволяют надежно рассчитывать нейтринное энерговыделение во внутренних областях нейтронных звезд.
2. Разработан новый сценарий остывания, в котором наблюдения изолированных нейтронных звезд можно объяснить без привлечения прямого урка-процесса в их ядрах. При этом ускоренное остывание, необходимое для объяснения наблюдений нейтронных звезд, наиболее холодных для своего возраста, обеспечивается нейтринным излучением при куперовском спаривании нейтронов.
3. Изучен новый механизм нейтринного излучения – прямой урка-процесс в мантии нейтронных звезд. Нейтринное энерговыделение в этом процессе в несверхтекучем веществе может на 2–3 порядка превосходить энерговыделение во внешнем ядре несверхтекучей нейтронной звезды. Влияние данного процесса на остывание звезды наиболее существенно при сильной сверхтекучести нуклонов в ядре звезды и несверхтекучей мантии.
4. Рассмотрена тепловая эволюция несверхтекучей нейтронной звезды,

совершающей малые радиальные колебания. Получена система уравнений тепловой эволюции и затухания колебаний звезды с учетом эффектов общей теории относительности. Показано, что эволюция колеблющейся звезды существенно зависит от степени нелинейности неравновесного модифицированного урка-процесса и от механизма вязкого затухания. Характерные времена затухания колебаний фундаментальной моды не превосходят 100–1000 лет.

5. Рассчитана матрица сверхтекучих плотностей  $\rho_{\alpha\alpha'}$  нейтрон-протонной смеси при произвольных температурах. Показано, что температурная зависимость матрицы  $\rho_{\alpha\alpha'}$  описывается (в приближении БКШ) универсальной функцией  $\Phi_{\alpha}(T)$ .
6. Рассчитан спектр радиальных пульсаций сверхтекучих нейтронных звезд. Показано, что эффекты конечной внутренней температуры существенно влияют на спектр пульсаций звезды в интервале  $T \sim (0.1-1)T_{\text{сн}}$ . Исследовано изменение спектра пульсаций остывающей нейтронной звезды со временем. Показано, что существенное изменение собственных частот пульсаций может происходить в течение 20 лет с момента возникновения сверхтекучести нейтронов.

В заключение автор выражает искреннюю признательность А.Д. Каминкеру, П. Хэнселу и своему научному руководителю, Д.Г. Яковлеву, за удовольствие работать с ними, а также Д.П. Барсукову, К.П. Левенфиш, А.И. Цыгану и Ю.А. Шибанову за интерес к работе и критические замечания.

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ 00-07-90183, 02-02-17668, 03-07-90200, 05-02-16245, 05-02-22003, INTAS YSF 03-55-2397, программы поддержки ведущих научных школ 1115.2003.2, а также Российского Фонда Поддержки Отечественной Науки.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Альпар и др. (M.A. Alpar, Stephen A. Langer, J.A. Sauls) // *Astrophys. J.* **282**, 533 (1984).
2. Акмаль, Пандхарипанде (A. Akmal, V. R. Pandharipande) // *Phys. Rev.* **C56**, 2261 (1997).
3. Амундсен, Остгард (L. Amundsen, E. Østgaard) // *Nucl. Phys.* **A442**, 163 (1985).
4. Андерссон, Коккотас (N. Andersson, K.D. Kokkotas) // *Int. J. Mod. Phys.* **D10**, 381 (2001).
5. Андерссон, Комер (N. Andersson, G.L. Comer) // *MNRAS* **328**, 1129 (2001).
6. Андерссон, Комер (N. Andersson, G.L. Comer) // *Class. Quant. Grav.* **18**, 969 (2001b).
7. Андерссон и др. (N. Andersson, G.L. Comer, D. Langlois) // *Phys. Rev.* **D66**, 104002 (2002).
8. Андерссон (N. Andersson) // *Class. Quant. Grav.* **20**, R105 (2003).
9. Андерссон и др. (N. Andersson, G.L. Comer, R. Prix) // *Phys. Rev. Lett.* **90**, 091101 (2003).
10. А.Ф. Андреев, Е.П. Башкин // *ЖЭТФ* **69**, 319 (1975).
11. Арендт и др. (R.G. Arendt, E. Dwek, R. Petre) // *Astrophys. J.* **368**, 474 (1991).

12. Аппас и др. (P. Arras, E.E. Flanagan, S.M. Morsink, A.K. Schenk, S.A. Teukolsky, I. Wasserman) // *Astrophys. J.* **591**, 1129 (2003).
13. Р. Архипов, И. Халатников // *ЖЭТФ* **33**, 758 (1957).
14. Байко и др. (D.A. Baiko, P. Haensel, D.G. Yakovlev) // *Astron. Astrophys.* **374**, 151 (2001).
15. Бакал, Вольф (J.N. Bahcall, R.A. Wolf) // *Phys. Rev.*, **140**, 1452 (1965).
16. Бальдо и др. (M. Baldo, J. Cugnon, A. Lejeune, U. Lombardo) // *Nucl. Phys.* **A536**, 349 (1992).
17. Бардин и др. (J.M. Bardeen, K.S. Thorne, D.W. Meltzer) // *Astrophys. J.* **145**, 505 (1966).
18. Бейгер и др. (M. Bejger, D.G. Yakovlev, O.Y. Gnedin) // *Acta Phys. Polonica* **B34**, 221 (2003).
19. Бейм, Петик (G. Baym, C. Pethick) // *Landau Fermi-Liquid Theory* (John Wiley, New York, 1991).
20. Бетбедер-Матибет, Нозьер (O. Betbeder-Matibet, P. Nozieres) // *Ann. Phys.* **51**, 392 (1969).
21. Блашке и др. (D. Blaschke, H. Grigorian, D. N. Voskresensky) // *Astron. Astrophys.* **424**, 979 (2004).
22. Боруманд и др. (M. Borumand, R. Joynt, W. Kluźniak) // *Phys. Rev.* **C54**, 2745 (1996).
23. Брайе, Романи (T.M. Braje, R.W. Romani) // *Astrophys. J.* **580**, 1043 (2002).
24. Брискен и др. (W.F. Brisken, S.E. Thorsett, A. Golden, W.M. Goss) // *Astrophys. J. Lett.* **593**, L89 (2003).
25. Бурвиц и др. (V. Burwitz, F. Haberl, R. Neuhauser, P. Predehl, J. Trümper, V.E. Zavlin) // *Astron. Astrophys.* **399**, 1109 (2003).



26. Бэкман и др. (S.-O. Bäckman, C.-G. Källman, O. Sjöberg) // Phys. Lett. **43B**, 263 (1973).
27. Бэкман и др. (S.-O. Bäckman, O. Sjöberg, A.D. Jackson) // Nucl. Phys. **A321**, 10 (1979).
28. Бэкман и др. (S.-O. Bäckman, G.E. Brown, J.A. Niskanen) // Phys. Rep. **124**, 1 (1985).
29. Вайнберг (S. Weinberg) // Astrophys. J. **168**, 175 (1971).
30. Вайскопф и др. (M.C. Weisskopf, S.L. O'Dell, F. Paerels, R.F. Elsner, W. Becker, A.F. Tennant, D.A. Swartz) // Astrophys. J. **601**, 1050 (2004).
31. Вамбах и др. (J. Wambach, T.L. Ainsworth, and D. Pines) // Nucl. Phys. **A555**, 128 (1993).
32. Гейзельберг, Хйорт-Йенсен (H. Heiselberg, M. Hjorth-Jensen) // Astrophys. J. **525**, L45 (1999).
33. Гепперт и др. (U. Geppert, M. Küker, D. Page) // Astron. Astrophys. **426**, 267 (2004).
34. Гнедин, Яковлев (O.Y. Gnedin, D.G. Yakovlev) // Nucl. Phys. **A582**, 697 (1995).
35. Гнедин и др. (O.Y. Gnedin, D.G. Yakovlev, A.Y. Potekhin) // MNRAS **324**, 725 (2001).
36. Гусаков (M.E. Gusakov) // Astron. Astrophys. **389**, 702–715 (2002).
37. М.Е. Гусаков, О.Ю. Гнедин // Письма в Астрон. журн. **28**, 669–675 (2002).
38. М.Е. Гусаков. // Астрофизика высоких энергий, Препринт ИКИ РАН, Москва, стр. 6 (2003).
39. М.Е. Гусаков, А.Д. Каминкер, Д.Г. Яковлев, О.Ю. Гнедин // Письма в Астр. Журн. **30**, 759–771 (2004).

40. Гусаков и др. (M.E. Gusakov, A.D. Kaminker, D.G. Yakovlev, O.Yu. Gnedin) // *Astron. Astrophys.* **423**, 1063–1072 (2004).
41. Гусаков и др. (M.E. Gusakov, D.G. Yakovlev, P. Haensel, O.Y. Gnedin) // *Astron. Astrophys.* **421**, 1143–1148 (2004).
42. Гусаков и др. (M.E. Gusakov, D.G. Yakovlev, O.Y. Gnedin) // *Zeldovich-90: Cosmology and High Energy Astrophysics, Book of abstracts, Moscow*, p. 15 (2004).
43. Гусаков, Хэнсел (M.E. Gusakov, P. Haensel) // *Nucl. Phys.* **A761**, 333–348 (2005).
44. Гусаков и др. (M.E. Gusakov, D.G. Yakovlev, O.Yu. Gnedin) // *MNRAS*, **361**, 1415–1424 (2005).
45. Гусаков и др. (M.E. Gusakov, A.D. Kaminker, D.G. Yakovlev, O.Y. Gnedin) // *MNRAS*, **363**, 563–580 (2005).
46. Гусаков, Хэнсел (M.E. Gusakov, P. Haensel) // *7th Russian Conference on Physics of Neutron Stars, Book of Abstracts, Saint-Petersburg*, p. 41 (2005).
47. М.Е. Гусаков. // *Астрофизика высоких энергий сегодня и завтра, Москва, Ротапринт ИКИ РАН*, стр. 21 (2005).
48. М.Е. Гусаков. // *Десятая Санкт-Петербургская Ассамблея молодых ученых и специалистов, Аннотации работ по грантам конкурса 2005 года для студентов и аспирантов вузов и академических институтов Санкт-Петербурга, Санкт-Петербург*, стр. 19 (2005).
49. Гусаков, Андерссон (M.E. Gusakov, N. Andersson) // *MNRAS*, submitted (2006).
50. Де Жен (P.G. De Gennes) // *Superconductivity of Metals and Alloys* (Benjamin, New York, 1966).

51. Джайкумар и др. (P. Jaikumar, C. Gale, D. Page) // *Phys. Rev. D* **72**, 123004 (2005).
52. Джонс (P.V. Jones) // *MNRAS* **321**, 167 (2001).
53. Джэксон и др. (A.D. Jackson, E. Krotscheck, D.E. Meltzer, R.A. Smith) // *Nucl. Phys.* **A386**, 125 (1982).
54. Душен, Хэнсел (F. Douchin, P. Haensel) // *Astron. Astrophys.* **380**, 151 (2001).
55. Ждуник (J.L. Zdunik) // *Astron. Astrophys.* **308**, 828 (1996).
56. Завлин и др. (V.E. Zavlin, J. Trümper, G.G. Pavlov) // *Astrophys. J.* **525**, 959 (1999).
57. Завлин, Павлов (V.E. Zavlin, G.G. Pavlov) // in: 270 WE-Heraeus Seminar on Neutron Stars, Pulsars and Supernova Remnants, (Ed. W. Becker, H. Lesh, & J. Trümper; MPE: Garching, 2002), p. 263.
58. Завлин, Павлов (V.E. Zavlin, G.G. Pavlov) // *Memorie della Societa' Astronomica Italiana*, the Proceedings of the EPIC Consortium (held on Oct. 14–16, 2003 in Palermo) to be published [astro-ph/0312326].
59. Завлин и др. (V.E. Zavlin, G.G. Pavlov, D. Sanwal) // *Astrophys. J.*, accepted (2003) [astro-ph/0312096].
60. Зане и др. (S. Zane, F. Haberl, M. Cropper, V.E. Zavlin, D. Lumb, S. Sembay, C. Motch) // *MNRAS* **334**, 345 (2002).
61. Зуо и др. (W. Zuo, Z. H. Li, G. C. Lu, J. Q. Li, W. Scheid, U. Lombardo, H.-J. Schulze, C. W. Shen) // *Phys. Lett.* **B595**, 44 (2004).
62. Йошида, Ли (S. Yoshida, U. Lee) // *Phys. Rev.* **D67**, 124019 (2003).
63. Каминкер и др. (A.D. Kaminker, P. Haensel, D.G. Yakovlev) // *Astron. Astrophys.* **345**, L14 (1999).

64. Каминкер и др. (A.D. Kaminker, P. Haensel, D.G. Yakovlev) // *Astron. Astrophys.* **373**, L17 (2001).
65. Каминкер и др. (A.D. Kaminker, D.G. Yakovlev, O.Y. Gnedin) // *Astron. Astrophys.* **383**, 1076 (2002).
66. Каминкер и др. (A.D. Kaminker, M.E. Gusakov, D.G. Yakovlev, O.Y. Gnedin) // 7th Russian Conference on Physics of Neutron Stars, Book of Abstracts, Saint-Petersburg, p. 44 (2005).
67. А.Д. Каминкер, М.Е. Гусаков, А.Ю. Потехин, Д.Г. Яковлев, О.Ю. Гнедин. // *Астрофизика высоких энергий сегодня и завтра*, Москва, Ротапринт ИКИ РАН, стр. 26 (2005).
68. Каминкер и др. (A.D. Kaminker, M.E. Gusakov D.G. Yakovlev, O.Y. Gnedin) // *MNRAS* **365**, 1300–1308 (2006).
69. Каплан и др. (D.L. Kaplan, S.R. Kulkarni, M.H. van Kerkwijk, H.L. Marshall) // *Astrophys. J.* **570**, L79 (2002).
70. Каплан и др. (D.L. Kaplan, D.A. Frail, B.M. Gaensler, E.V. Gotthelf, S.R. Kulkarni, P.O. Slane, A. Nechita) // *Astrophys. J. Suppl.* **153**, 269 (2004).
71. Катлер, Линдблом (C. Cutler, L. Lindblom) // *Astrophys. J.* **314**, 234 (1987).
72. Катлер и др. (C. Cutler, L. Lindblom, R.J. Splinter) // *Astrophys. J.* **363**, 603 (1990).
73. Картер (B. Carter) // in: *Journées Relativistes 1976*, edited by M. Cahen, R. Debever, and J. Geheniau (Université Libre de Bruxelles, Brussels, 1976), pp. 12–27.
74. Картер (B. Carter) // in: *Journées Relativistes 1979*, edited by I. Moret-Bailly and C. Latremolière (Faculté des Sciences, Anger, 1979), pp. 166–182.
75. Картер (B. Carter) // in: *A Random Walk in Relativity and Cosmology*, Proceedings of the Vadya-Raychaudhuri Festschrift, IAGRG, 1983, edited

by N. Dadhich, J. Krishna Rao, J.V. Narlikar, and C.V. Vishveshwara (Wiley Eastern, Bombay, 1985), pp. 48–62.

76. Картер, Халатников (B. Carter, I.M. Khalatnikov) // Phys. Rev. **D45**, 4536 (1992).
77. Картер, Халатников (B. Carter, I.M. Khalatnikov) // Ann. Phys. **219**, 243 (1992).
78. Картер, Ланглоис (B. Carter, D. Langlois) // Nucl. Phys. **B531**, 478 (1998).
79. Картер, Пракаш (G.W. Carter, M. Prakash) // Phys. Lett. **B525**, 249 (2002).
80. Комер, Джойнт (G.L. Comer, R. Joynt) // Phys. Rev. **D68**, 023002 (2003).
81. Комер и др. (G.L. Comer, D. Langlois, L.M. Lin) // Phys. Rev. **D60**, 104025 (1999).
82. Крамер и др. (M. Kramer, A.G. Lyne, G. Hobbs, O. Löhmer, P. Carr, C. Jordan, A. Wolszczan) // Astrophys. J. Lett. **593**, L31 (2003).
83. Кроппер и др. (M. Cropper, M. Haberl, S. Zane, V.E. Zavlin) // MNRAS **351**, 1099 (2004).
84. Лайн и др. (A.G. Lyne, R.S. Pritchard, F. Graham-Smith, F. Camilo) // Nature **381**, 497 (1996).
85. Ланглоис и др. (D. Langlois, D.M. Sedrakian, B. Carter) // MNRAS **297**, 1189 (1998).
86. Л.Д. Ландау // ЖЭТФ **11**, 592 (1941).
87. Ландау (L.D. Landau) // J. Physics **11**, 91 (1947).
88. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц // Статистическая физика, Часть I, Курс теоретической физики, М., Наука (1976)

89. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц // Гидродинамика, Курс теоретической физики, М., Наука (1988)
90. А.И. Ларкин, А.Б. Мигдал // ЖЭТФ **44**, 1703 (1963).
91. Латтимер и др. (J.M. Lattimer, S.J. Pethick, M. Prakash, P. Haensel) // Phys. Rev. Lett. **66**, 2701 (1991).
92. Латтимер, Пракаш (J.M. Lattimer, M. Prakash) // Astrophys. J. **550**, 426 (2001).
93. В.В. Лебедев, И.М. Халатников // ЖЭТФ **83**, 1623 (1982).
94. К.П. Левенфиш, Д.Г. Яковлев // Письма в Астрон. ж. **20**, 54 (1994).
95. К.П. Левенфиш, Д.Г. Яковлев // Письма в Астрон. ж. **22**, 56 (1996).
96. К.П. Левенфиш, Ю.А. Шибанов, Д.Г. Яковлев // Письма в Астрон. ж. **25**, 491 (1999).
97. Леггетт (A.J. Leggett) // Phys. Rev. **A140**, 1869 (1965).
98. Леггетт (A.J. Leggett) // Rev. Mod. Phys. **47**, 331 (1975).
99. Линдблом, Менделл (L. Lindblom, G. Mendell) // Astrophys. J. **421**, 689 (1994).
100. Линдблом (L. Lindblom) // in: *Gravitational waves: A Challenge to Theoretical Astrophysics* (Ed. V. Ferrari, J.C. Miller, L. Rezzolla; ICTP, Lecture Notes Series, 2001).
101. Е.М. Лифшиц, Л.П. Питаевский // Статистическая физика, Часть 2., М., Наука (1978).
102. Ломбардо, Шульце (U. Lombardo, H.-J. Schulze) // in: *Physics of Neutron Star Interiors* (Ed. D. Blaschke, N.K. Glendenning, A. Sedrakian; Springer, Berlin, 2001) p. 30.

103. МакДермотт и др. (P.N. McDermott, M.P. Savedoff, H.M. Van Horn, E.G. Zweibel, C.J. Hansen) // *Astrophys. J.* **281**, 746 (1984).
104. МакДермотт и др. (P.N. McDermott, H.M. Van Horn, C.J. Hansen) // *Astrophys. J.* **325**, 725 (1988).
105. МакГован и др. (K.E. McGowan, S. Zane, M. Cropper, J.A. Kennea, F.A. Cordova, C. Ho, T. Sasseen, W.T. Vestrand) // *Astrophys. J.* **600**, 343 (2004).
106. Маржерон и др. (J. Margueron, I. Vidaña, and I. Bombaci) // *Phys. Rev.* **C68**, 055806 (2003).
107. Мастрано, Мелатос (A. Mastrano, A. Melatos) // *MNRAS* **361**, 927 (2005).
108. Мельтцер, Торн (D.W. Meltzer, K.S. Thorne) // *Astrophys. J.* **145**, 514 (1966).
109. Менделл (G. Mendell) // *Astrophys. J.* **380**, 515 (1991a).
110. Менделл (G. Mendell) // *Astrophys. J.* **380**, 530 (1991b).
111. Мотч и др. (C. Motch, V.E. Zavlin, F. Haberl) // *Astron. Astrophys.* **408**, 323 (2003).
112. Музикар и др. (P. Musikar, J.A. Sauls, J.W. Serene) // *Phys. Rev. D*, **D21**, 1494 (1980).
113. Негель, Вотрэн (J.W. Negele, D. Vautherin) // *Nucl. Phys.* **A207**, 298 (1973).
114. Оямацу (K. Oyamatsu) // *Nucl. Phys.* **A561**, 431 (1993).
115. Павлов и др. (G.G. Pavlov, V.E. Zavlin, D. Sanwal, V. Burwitz, G.P. Garmire) // *Astrophys. J. Lett.* **552**, L129 (2001).
116. Павлов и др. (G.G. Pavlov, V.E. Zavlin, D. Sanwal) // in: *WE-Heraeus Seminar on Neutron Stars, Pulsars and Supernova Remnants No.270* (Ed.

- W. Becker, H. Lesch, J. Trümper; Garching: MPE-Report 278, 2002), p. 273.
117. Павлов, Завлин (G.G. Pavlov, V.E. Zavlin) // in: *Proceedings of the XXI Texas Symposium on Relativistic Astrophysics*, (Ed. R. Bandiera, R. Maiolino, F. Mannucci; World Scientific Publishing: Singapore, 2003) p. 319.
  118. Паж, Эпплгейт (D. Page, J.H. Applegate) // *Astrophys. J.* **394**, L17 (1992).
  119. Паж (D. Page) // in: *The Many Faces of Neutron Stars*, NATO ASI Ser. C, v. 515 (Ed. R. Buccheri, J. van Paradijs, M.A. Alpar; Kluwer, Dordrecht, 1998a) p. 539.
  120. Паж (D. Page) // in: *Neutron Stars and Pulsars* (Ed. N. Shibasaki, N. Kawai, S. Shibata, T. Kifune; Univ. Acad. Press, Tokyo, 1998b) p. 183.
  121. Паж и др. (D. Page, J.M. Lattimer, M. Prakash, A.W. Steiner) // *Astrophys. J. Suppl.* **155**, 623 (2004).
  122. Перальта и др. (C. Peralta, A. Melatos, M. Giacobello, A. Ooi) // *astro-ph/0509416* (2005).
  123. Петик, Равенхолл (C.J. Pethick, D.G. Ravenhall) // *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.* **45**, 429 (1995).
  124. Понс и др. (J.A. Pons, F. Walter, J. Lattimer, M. Prakash, R. Neuhäuser, P. An) // *Astrophys. J.* **564**, 981 (2002).
  125. Потехин и др. (A.Y. Potekhin, D.G. Yakovlev, G. Chabrier, O.Y. Gnedin) // *Astrophys. J.* **594**, 404 (2003).
  126. Пракаш и др. (M. Prakash, T.L. Ainsworth, J.M. Lattimer) // *Phys. Rev. Lett.* **61**, 2518 (1988).
  127. Прикс и др. (R. Prix, G.L. Comer, N. Andersson) // *MNRAS* **348**, 625 (2004).



128. Путтерман (S.J. Putterman) // Superfluid Hydrodynamics (North-Holland/American Elsevier, 1974).
129. Равенхолл и др. (D.G. Ravenhall, C.J. Pethick, J.R. Wilson) // Phys. Rev. Lett. **50**, 2066 (1983).
130. Ван Райпер (K.A. Van Riper) // Astrophys. J. Suppl. **75**, 449 (1991).
131. Рейсенеггер (A. Reisenegger) // Astrophys. J. **442**, 749 (1995).
132. Роджер и др. (R.S. Roger, D.K. Milne, M.J. Kesteven, K.J. Wellington, R.F. Haynes) // Astrophys. J. **332**, 940 (1988).
133. Сйоберг (O. Sjöberg) // Nucl. Phys. **A265**, 511 (1976).
134. Сйоберг (O. Sjöberg) // Ann. Phys. **78**, 39 (1973).
135. Слэйн и др. (P.O. Slane, D.J. Helfand, S.S. Murray) // Astrophys. J. Lett. **571**, L45 (2002).
136. Соьер (R.F. Sawyer) // Phys. Rev. D **39**, 3804 (1989).
137. Сон (D.T. Son) // Int. J. Mod. Phys. **A16S1C**, 1284 (2001).
138. Тамагаки (R. Tamagaki) // Prog. Theor. Phys., **44**, 905 (1970).
139. Такацука, Тамагаки (T. Takatsuka, R. Tamagaki) // Nucl. Phys. A **738**, 387 (2004).
140. Тисса (L. Tisza) // Nature **141**, 913 (1938).
141. Торн (K.S. Thorne) // Astrophys. J. **212**, 825 (1977).
142. Трюмпер и др. (J.E. Trümper, V. Burwitz, F. Haberl, V.E. Zavlin) // Nucl. Phys. B Proc. Suppl. **132**, 560 (2004).
143. Цурута и др. (S. Tsuruta, M. A. Teter, T. Takatsuka, T. Tatsumi, R. Tamagaki) // Astrophys. J. **571**, L143 (2002).

144. Уаттс, Стрехмайер (A.L. Watts, T.E. Strohmayer) // *Astrophys. J.*, **637**, L117 (2006).
145. Уинклер и др. (P.F. Winkler, J.H. Tuttle, R.P. Kirshner, M.J. Irwin) // in: *Supernova Remnants and the Interstellar Medium* (Ed. R.S. Roger, T.L. Landecker; Cambridge: Cambridge University Press, 1988), p. 65.
146. Уолтер (F.M. Walter) // *Astrophys. J.* **549**, 433 (2001).
147. Уолтер, Латтимер (F.M. Walter, J.M. Lattimer) // *Astrophys. J. Lett.* **576**, L145 (2002).
148. Фейнман (R.P. Feynman) // *Statistical Mechanics* (Benjamin, Massachusetts, 1972).
149. Финци, Вольф (A. Finzi, R.A. Wolf) // *Astrophys. J.* **153**, 835 (1968).
150. Флауэрс и др. (E.G. Flowers, M. Ruderman, P.G. Sutherland) // *Astrophys. J.* **205**, 541 (1976).
151. Флауэрс, Ито (E. Flowers, N. Itoh) // *Astrophys. J.* **230**, 847 (1979).
152. Фриман, Максвелл (B.L. Friman, D.V. Maxwell) // *Astrophys. J.*, **232**, 541 (1979).
153. И.М. Халатников // *ЖЭТФ* **23**, 169 (1952).
154. И.М. Халатников // *Письма в ЖЭТФ* **17**, 534 (1973).
155. Халатников, Лебедев (I.M. Khalatnikov, V.V. Lebedev) // *Phys. Lett.* **91A**, 70 (1982).
156. Халатников (I.M. Khalatnikov) // *An Introduction to the Theory of Superfluidity* (Addison-Wesley, New York, 1989).
157. Ходель и др. (V.A. Khodel, V.V. Khodel, J.W. Clark) // *Phys. Rev. Lett.* **81**, 3828 (1998).

158. Ходель и др. (V.A. Khodel, J.W. Clark, M.V. Zverev) // Phys. Rev. Lett. **88**, 031103 (2001).
159. Ходель и др. (V. A. Khodel, J. W. Clark, M. Takano, M. V. Zverev) // Phys. Rev. Lett. **93**, 151101 (2004).
160. Хэнсел (P. Haensel) // Nucl. Phys. **A301**, 53 (1978).
161. Хэнсел (P. Haensel) // Astron. Astrophys. **262**, 131 (1992).
162. Хэнсел и др. (P. Haensel, K.P. Levenfish, D.G. Yakovlev) // Astron. Astrophys. **372**, 130 (2001).
163. Хэнсел и др. (P. Haensel, K.P. Levenfish, D.G. Yakovlev) // Astron. Astrophys. **394**, 213 (2002).
164. Хэнсел (P. Haensel) // in: *Final Stages of Stellar Evolution* (Ed. J.-M. Hameury, C. Motch, EAS Publications Series, EDP Sciences, 2003), p. 249.
165. Ченг, Билдстен (P. Chang, L. Bildsten) // Astrophys. J. **585**, 464 (2003).
166. Чандрасекар (S. Chandrasekhar) // Astrophys. J. **140**, 417 (1964).
167. Чен и др. (J.M.C. Chen, J.W. Clark, R.D. Davé, V.V. Khodel) // Nucl. Phys. **A555**, 59 (1993).
168. А.И. Чугунов, Д.Г. Яковлев // Астрон. Журн. **82**, 814 (2005).
169. Шааб и др. (Ch. Schaab, F. Weber, M.K. Weigel) // Astron. Astrophys. **335**, 596 (1998).
170. Шапиро, Тюкольски (S.L. Shapiro, S.A. Teukolsky) // *Black Holes, White Dwarfs, and Neutron Stars*, Wiley-Interscience, New York (1983).
171. Швенк и др. (A. Schwenk, B. Friman, and G.E. Brown) // Nucl. Phys. **A713**, 191 (2003).
172. Швенк, Фриман (A. Schwenk, B. Friman) // Phys. Rev. Lett. **92**, 082501 (2004).

173. Шен и др. (C. Shen, U. Lombardo, N. Van Giai, and W. Zuo) // Phys. Rev. **C68**, 055802 (2003).
174. Шульце и др. (H.-J. Schulze, J. Cugnon, A. Lejeune, M. Baldo, U. Lombardo) // Phys. Lett. **B375**, 1 (1996).
175. Яковлев, Левенфиш (D.G. Yakovlev, K.P. Levenfish) // Astron. Astrophys. **297**, 717 (1995).
176. Д.Г. Яковлев, К.П. Левенфиш, Ю.А. Шибанов // УФН **169**, 825 (1999).
177. Яковлев и др. (D.G. Yakovlev, A.D. Kaminker, K.P. Levenfish) // Astron. Astrophys. **343**, 650 (1999).
178. Яковлев и др. (D.G. Yakovlev, A.D. Kaminker, O.Y. Gnedin) // Astron. Astrophys. **379**, L5 (2001).
179. Яковлев и др. (D.G. Yakovlev, A.D. Kaminker, O.Y. Gnedin, P. Haensel) // Phys. Rep. **354**, 1 (2001).
180. Яковлев и др. (D.G. Yakovlev, O.Y. Gnedin, A.D. Kaminker, A.Y. Potekhin) // in: *WE-Heraeus Seminar on Neutron Stars, Pulsars and Supernova Remnants No. 270* (Ed. W. Becker, H. Lesch, J. Trümper; Garching: MPE-Report 278, 2002), p. 287.
181. Яковлев и др. (D.G. Yakovlev, O.Y. Gnedin, A.D. Kaminker, K.P. Levenfish, A.Y. Potekhin) // Adv. Space Res. **33**, 523 (2004).
182. Яковлев, Хэнсел (D.G. Yakovlev, P. Haensel) // Astron. Astrophys. **407**, 259 (2003).
183. Яковлев, Петик (D.G. Yakovlev, C.J. Pethick) // Ann. Rev. Astron. Astrophys. **42**, 169 (2004).
184. Яковлев и др. (D.G. Yakovlev, O.Y. Gnedin, M.E. Gusakov, A.D. Kaminker, A.Y. Potekhin) Neutrino emission and thermal states of neutron stars // 35th COSPAR Scientific Assembly, Paris, p. 197 (2004).

185. Яковлев и др. (D.G. Yakovlev, O.Y. Gnedin, M.E. Gusakov, A.D. Kaminker, K.P. Levenfish, A.Y. Potekhin) // Nucl. Phys. **A752**, 590–599 (2005).
186. Яковлев и др. (D.G. Yakovlev, K.P. Levenfish, M.E. Gusakov) Non-equilibrium weak interaction processes in neutron stars // International Conference on Theoretical Physics, Book of Abstracts, Moscow, p. 50 (2005).
187. Яковлев и др. (D.G. Yakovlev, M.E. Gusakov, A.D. Kaminker, A.Y. Potekhin) Neutrino emission from neutron stars // Exotic Nuclei and Nuclear/Particle Astrophysics, Proceedings of the Carpathian Summer School of Physics 2005 (Mamaia-Constanta, Romania, June 13–24, 2005, eds. S. Stoica, L. Trache, R.E. Tribble), World Scientific, Singapore, (2006) in press.

## ПРИЛОЖЕНИЯ

### Приложение 1. Аппроксимационные формулы для факторов подавления

На рис. 1 построено четыре области I, II, III и IV на плоскости  $v_1-v_2$ , где аппроксимационные формулы для нейтронной и протонной ветвей модифицированного урка-процесса различны. Эти области одинаковы для сверхтекучести нейтронов любого типа (A, B или C).

Мы рассчитали фактор подавления модифицированного урка-процесса по формуле (1.22), как это описано в главе 1. Вводя полярные координаты ( $v_1 = v \sin \varphi$ ,  $v_2 = v \cos \varphi$ ), в областях I, II и III мы аппроксимировали численные результаты следующим выражением:

$$R^N = \exp \left( -\frac{A v^2}{(1 + B v^2)^C} \right), \quad (1)$$

В области IV использовалась другая аппроксимационная формула :

$$R^N = C \exp(-A/B), \quad (2)$$

В областях I, II и III функции  $A$ ,  $B$  и  $C$  зависят от  $\varphi$ . В области IV они зависят от  $v_1$  и  $v_2$ .

В случае *сверхтекучести нейтронов и протонов типа A для нейтронной ветви модифицированного урка-процесса* мы получили следующие аппроксимационные формулы.

Таблица 1: Коэффициенты  $p_i$  для фактора подавления  $R_{AA}^n$ ; степень 10 дана в квадратных скобках

$i$	I	II	III	IV
1	0.257798	-9.495146	-2.678004	0.268730
2	0.003532	-1.909172	64.33063	0.089294
3	19.57034	0.820250	-2.736549	0.002913
4	0.036350	10.17103	0.093232	1.752838[-5]
5	0.173561	5.874262	0.380818	3.047384[-7]
6	0.039996	0.023332	-0.015405	0.022415
7	0.101014	0.003191	-16.79340	0.001835
8	16.61755	201.8576	112.4511	5.849410[-7]
9	0.063353	5.520899	517.5343	0.001610
10	0.101188	1.257021	0.134529	
11	0.343374	-2.367854	-0.174503	
12	-0.135307	1.096571	-0.029008	
13	2.404372	0.481874	1.277903	
14	1.055914	487.4290	-25.70616	
15	1.086360	-0.452688	558.1592	
16		-257.9342	0.328108	
17		17.83708	0.642631	
18			0.260288	

В области I:

$$\begin{aligned}
 A &= p_1 + p_2 t^2 + \frac{p_4}{1 + p_3 t} - p_5 t, \\
 B &= p_6 + p_7 t^2 + \frac{p_9}{1 + p_8 t} - p_{10} t, \\
 C &= p_{11} - \frac{p_{12}}{y (1 + p_{13} z^2)^3}, \\
 t &= \cos^2(\varphi), \quad y = \sin^2(\varphi + p_{15}), \\
 z &= \cos^2(\varphi + p_{14}).
 \end{aligned} \tag{3}$$

В области II:

$$\begin{aligned}
A &= p_1 + p_2 z^2 + \frac{p_4}{1 + p_3 z} + p_5 z, \\
B &= p_6 - \frac{p_7 q}{1 + p_{11} t^2} + p_{12} q t^2, \\
C &= p_{13} + p_{14} y^3 + \frac{p_{16} y^3}{1 + p_{15} z^2} - p_{17} y^2, \\
z &= \cos^2 \varphi, \quad t = \cos^2(\varphi + p_8), \\
q &= \sin^2(p_9 \varphi + p_{10}), \quad y = \sin^2\left(\varphi + \frac{3\pi}{4}\right).
\end{aligned} \tag{4}$$

В области III:

$$\begin{aligned}
A &= p_4 + \frac{p_1 y}{1 + p_2 y + p_3 y^2} + p_5 y + p_6 y t, \\
B &= p_{10} + \frac{p_7 y}{1 + p_8 y + p_9 y^2} + p_{11} y + p_{12} y t, \\
C &= p_{16} + \frac{p_{13} y}{1 + p_{14} y + p_{15} y^2} + p_{17} y + p_{18} y t, \\
t &= \sin^2\left(\frac{2\pi\varphi}{0.321750554}\right), \quad y = \sin^2 \varphi.
\end{aligned} \tag{5}$$

В области IV:

$$\begin{aligned}
A &= p_1 v_1^2 + p_2 v_2^2 + p_3 v_1^2 v_2^2 + p_4 v_1^6 + p_5 v_2^6, \\
B &= 1 + p_6 v_1^2 + p_7 v_2^2 + p_8 v_1^4, \\
C &= 1 + p_9 v_2^4,
\end{aligned} \tag{6}$$

Коэффициенты  $p_i$  которые входят в выражения (3)–(6), приведены в таблице 2. Ошибка вычислений и аппроксимации не превосходит 10% при  $R_{AA}^n \gtrsim 10^{-5}$ .

В случае *протонной сверхтекучести* A и *нейтронной сверхтекучести* B для нейтронной ветви модифицированного урка-процесса получаем следующие аппроксимационные формулы.

В области I:



Таблица 2: Коэффициенты  $p_i$  для  $R_{AB}^n$ 

$i$	I	II	III	IV
1	-0.719681	-6.475443	0.316041	0.565001
2	-0.024591	-1.186294	-289.2964	0.087929
3	0.297357	0.591347	2480.961	0.006756
4	1.260056	6.953996	-268.8219	1.667194[-4]
5	0.100466	3.366945	1984.115	3.782805[-6]
6	0.148464	-9.172994	3503.094	0.173165
7	0.253881	-2.675793	0.331551	1.769413[-5]
8	140.3699	1.053679	-0.265977	7.710124[-8]
9	0.132615	10.38526	1098.324	0.001695
10	0.280765	7.138369	65528.01	
11	0.375796		0.024500	
12	-0.096843		0.120536	
13	3.100942		89.79866	
14	0.275434		5719.134	
15	0.330574		285.8473	
16			0.402111	
17			16657.19	

$$\begin{aligned}
A &= p_1 + p_2 t^2 + \frac{p_4}{1 + p_3 t} - p_5 t, \\
B &= p_6 + p_7 t^2 + \frac{p_9 t}{1 + p_8 t^2} - p_{10} t, \\
C &= p_{11} - \frac{p_{12}}{y(1 + p_{13} z^2)^3}, \\
y &= \sin^2(\varphi + p_{15}), \quad t = \cos^2 \varphi, \\
z &= \cos^2(\varphi + p_{14}).
\end{aligned} \tag{7}$$

В области II:

$$\begin{aligned}
A &= p_1 + p_2 z^2 + \frac{p_4}{1 + p_3 z} + p_5 z, \\
B &= 0.035, \\
C &= p_6 + p_7 z^2 + \frac{p_9}{1 + p_8 z} + p_{10} z, \\
z &= \cos^2 \varphi, \quad t = \cos^2(\varphi + p_8), \\
q &= \sin^2(p_9 \varphi + p_{10}), \quad y = \sin^2(\varphi + 3\pi/4).
\end{aligned} \tag{8}$$

В области III:

$$\begin{aligned}
A &= \frac{p_{12} (1 + p_{15} \varphi^2 + p_{16} \varphi^3 + p_{17} \varphi^4)}{1 + p_{13} \varphi^2 + p_{14} \varphi^3}, \\
B &= p_{11} + \frac{p_7}{1 + p_8 \varphi^2 + p_9 \varphi^3 + p_{10} \varphi^4}, \\
C &= \frac{p_1 (1 + p_4 \varphi^2 + p_5 \varphi^3 + p_6 \varphi^4)}{1 + p_2 \varphi^2 + p_3 \varphi^3}.
\end{aligned} \tag{9}$$

В области IV:

$$\begin{aligned}
A &= p_1 v_1^2 + p_2 v_2^2 + p_3 v_1^2 v_2^2 + p_4 v_1^6, \\
B &= \sqrt{1 + p_6 v_1^2 + p_7 v_2^2 + p_5 v_1^8 + p_8 v_1^6}, \\
C &= 1 + p_9 v_2^4.
\end{aligned} \tag{10}$$

Коэффициенты  $p_i$  из выражений (7)–(10) приведены в таблице 3. Ошибка вычислений и аппроксимации не превосходит 5–15%, если  $R_{\text{AB}}^n \gtrsim 10^{-5}$ .

В случае *протонной сверхтекучести*  $A$  и *нейтронной сверхтекучести*  $B$  для протонной ветви модифицированного урка-процесса получаем следующие аппроксимационные формулы.

В области I:

$$\begin{aligned}
A &= p_1 + p_2 \varphi + \frac{p_4 \varphi}{(1 + p_3 t \varphi)^2} + p_5 t \varphi^2, \\
B &= p_6 + p_7 \varphi + \frac{p_9 \varphi}{(1 + p_8 t \varphi + p_{10} y t)^2} + p_{11} \varphi^2, \\
C &= p_{12} - p_{13} t + \frac{p_{16}}{(1 + p_{14} t^2)^2} + p_{17} t \varphi, \\
y &= \sin^2(\varphi + p_{15}), \quad t = \cos^2 \varphi.
\end{aligned} \tag{11}$$

В области II:

Таблица 3: Коэффициенты  $p_i$  для  $R_{AB}^p$

$i$	I	II	III	IV
1	0.288203	0.398261	0.387542	0.272730
2	-0.124974	-0.054952	-195.5462	0.165858
3	17.39273	-0.084964	3032.985	0.005903
4	0.083392	-0.036240	-189.0452	2.555386[-5]
5	0.059046	-0.168712	3052.617	2.593057[-7]
6	0.028084	-0.704750	442.6031	0.023930
7	-0.019990	-0.066981	0.041901	0.006180
8	28.37210	1.223731	-0.022201	1.289532[-5]
9	0.244471	0.363094	5608.168	0.005368
10	-0.610470	-0.357641	-10761.76	
11	0.023288	0.869196	0.064643	
12	0.475196	-0.364248	0.296253	
13	-0.180420	2.668230	106.3387	
14	25.51325	-0.765093	-75.36126	
15	0.281721	-4.198753	84.65801	
16	-0.080480		0.530223	
17	-0.191637		-86.76801	

$$\begin{aligned}
 A &= p_1 + p_2 z^2 + \frac{p_4}{1 + p_3 z} + p_5 \varphi, \\
 B &= p_6 + p_7 z^2 + \frac{p_8}{1 + p_9 z} + p_{10} \varphi, \\
 C &= p_{11} - p_{12} \varphi^2 + \frac{p_{13} \varphi^2}{1 + p_{14} z} + p_{15} \varphi, \\
 z &= \cos^2 \varphi.
 \end{aligned} \tag{12}$$

В области III функции  $A$ ,  $B$  и  $C$  задаются выражениями, формально совпадающими с (9).

В области IV:

$$\begin{aligned}
 A &= p_1 v_2^2 + p_2 v_1^2 + p_3 v_1^2 v_2^2 + p_4 v_2^6 + p_5 v_1^6, \\
 B &= 1 + p_6 v_2^2 + p_7 v_1^2 + p_8 v_2^4, \\
 C &= 1 + p_9 v_1^4.
 \end{aligned} \tag{13}$$

Коэффициенты  $p_i$  в (9), (11)–(13) даны в таблице 4. Ошибка вычислений и аппроксимации не превосходит 8% для тех значений  $v_1$  и  $v_2$ , для которых  $R_{AB}^p \gtrsim 10^{-5}$ .

В случае *протонной сверхтекучести А и нейтронной сверхтекучести С* для нейтронной ветви модифицированного урка-процесса были получены следующие аппроксимационные формулы.

В области I:

$$\begin{aligned}
A &= p_1 + p_2 t^2 + \frac{p_4}{1 + p_3 t} - p_5 t, \\
B &= p_6 + p_7 t^2 + \frac{p_9 t}{(1 + p_8 t q)^2} - p_{10} t, \\
C &= p_{11} - \frac{p_{12}}{s(1 + p_{13} z^2)^3} + p_{17} s^2, \\
t &= \cos^2 \varphi, \quad z = \cos^2(\varphi + p_{14}), \\
q &= \sin^2(\varphi + p_{16}), \quad s = \sin^2(\varphi + p_{15}).
\end{aligned} \tag{14}$$

В области II:

$$\begin{aligned}
A &= p_1 + p_2 z^2 + \frac{p_4}{1 + p_3 z} + p_5 z, \\
B &= p_6 - \frac{p_7 q_b}{1 + p_{11} t_b^2} + p_{12} q_b t_b^2, \\
C &= p_{13} - \frac{p_{14} q_c}{1 + p_{18} t_c^2} + p_{19} q_c t_c^2, \\
z &= \cos^2 \varphi, \quad t_b = \cos^2(\varphi + p_8), \\
q_b &= \sin^2(p_9 \varphi + p_{10}), \quad t_c = \cos^2(\varphi + p_{15}), \\
q_c &= \sin^2(p_{16} \varphi + p_{17}).
\end{aligned} \tag{15}$$

В области III функции  $A$ ,  $B$  и  $C$  задаются формулами (9). В области IV:

$$\begin{aligned}
A &= p_1 v_1^2 + p_2 v_2^2 + p_3 v_1^2 v_2^2 + p_4 v_1^6, \\
B &= \sqrt{1 + p_6 v_1^2 + p_7 v_2^2 + p_5 v_1^8 + p_8 v_1^6}, \\
C &= 1 + p_9 v_2^4 + p_{10} v_2^2 + p_{11} v_1^2 v_2^2.
\end{aligned} \tag{16}$$

Коэффициенты  $p_i$  в (14)–(16) даны в таблице 5. Ошибка вычислений и аппроксимации не превосходит 10% для тех значений  $v_1$  и  $v_2$ , для которых  $R_{AC}^n \gtrsim 10^{-6}$ .

Таблица 4: Коэффициенты  $p_i$  для  $R_{AC}^n$ 

$i$	I	II	III	IV
1	0.897393	-3.471368	0.322115	0.175090
2	-0.045357	-0.133540	-15.05047	0.088159
3	0.309724	0.143230	112.9733	3.055763[-3]
4	-0.739962	3.634659	-13.79012	3.984607[-7]
5	0.222597	0.496579	128.3156	5.591497[-8]
6	0.032104	0.030609	39.82789	0.046496
7	-0.054011	0.005056	0.164614	1.452790[-5]
8	61.73448	0.438608	49.07699	4.505614[-8]
9	0.195679	-2.970431	-3.145006	1.779724[-3]
10	-0.001851	0.284703	5132.076	2.136809[-4]
11	0.482581	0.898355	0.018737	5.365717[-4]
12	-0.001637	-0.036420	0.100223	
13	-0.685659	0.407393	4.055407	
14	1.528415	-0.058942	390.6242	
15	-0.053834	0.605413	6.594365	
16	-0.452426	2.851209	175.7396	
17	-0.053502	-0.800218	441.3965	
18		1.497718		
19		1.476375		

В случае *протонной сверхтекучести* А и *нейтронной сверхтекучести* С для протонной ветви модифицированного урка-процесса при  $v_1 \leq 25$  получены следующие аппроксимационные формулы.

Таблица 5: Коэффициенты  $p_i$  для  $R_{AC}^p$

$i$	I	II	III	IV
1	0.049947	-4.985248	0.100241	0.272905
2	-0.029006	-0.025984	0.005432	0.058684
3	3872.363	-0.007404	-0.748377	2.053694[-3]
4	0.250385	5.294455	0.050631	1.800867[-7]
5	-0.245758	-0.201654	0.007900	1.911708[-8]
6	0.018241	0.184431	-0.032915	0.052786
7	0.090256	-0.139729	-0.000768	2.043824[-5]
8	108.8302	0.415562	0.044312	4.458912[-8]
9	1.007326	2.692073	-0.697892	1.101541[-3]
10	0.061586	-0.385832	0.032534	3.312811[-4]
11	0.797695	1.055347	0.080109	2.682799[-4]
12	175.5965	0.013667	0.031994	
13	9.306619	-0.509106	8.724039	
14	-0.551550	-0.267675	2.982355	
15	1.203014	0.034585	-0.062076	
16	0.096598			
17	-0.441039			

В области I:

$$\begin{aligned}
 A &= p_1 + p_2 t^2 + \frac{p_4 t}{1 + p_3 t^2} - p_5 t, \\
 B &= p_6 + p_7 t q + \frac{p_9 t}{(1 + p_8 t q)^2} - p_{10} t, \\
 C &= p_{11} - \frac{p_{12} t}{s(1 + p_{13} z^2)^3} + p_{17} s t, \\
 q &= \sin^2(\varphi + p_{15}), \quad s = \sin^2(\varphi + p_{16}), \\
 t &= \cos^2 \varphi, \quad z = \cos^2(\varphi + p_{14}).
 \end{aligned} \tag{17}$$

В области II:

Таблица 6: Максимальные значения  $v = v_{\max}$  в аппроксимационных формулах и максимальная относительная ошибка  $\delta_{\max}$  аппроксимаций при  $v \leq v_{\max}$ .

Process	I	II	III
$R_{AA}^n, v_{\max}$	20	23	25
$\delta_{\max}, \%$	<10	<15	<20
$R_{AB}^n, v_{\max}$	15	15	25
$\delta_{\max}, \%$	<20	<20	<50
$R_{AC}^n, v_{\max}$	19	21	26
$\delta_{\max}, \%$	<15	<26	<20
$R_{AB}^p, v_{\max}$	22	13	13
$\delta_{\max}, \%$	<20	<5	<3
$R_{AC}^p, v_{\max}$	23	16	13
$\delta_{\max}, \%$	<13	<5	<2

$$\begin{aligned}
 A &= p_1 + p_2 z^2 + \frac{p_4}{1 + p_3 z} + p_5 \varphi, \\
 B &= p_6 + p_7 z^2 + \frac{p_8}{1 + p_9 z} + p_{10} \varphi, \\
 C &= p_{11} + p_{12} z^2 + \frac{p_{13}}{1 + p_{14} z} + p_{15} \varphi, \\
 z &= \cos^2 \varphi.
 \end{aligned} \tag{18}$$

В области III:

$$\begin{aligned}
 A &= p_1 + p_2 \varphi z + \frac{p_4}{1 + p_3 z} + p_5 \varphi, \\
 B &= p_6 + p_7 \varphi t + \frac{p_8 z}{1 + p_9 z^2} + p_{10} \varphi, \\
 C &= p_{11} + p_{12} \varphi z + \frac{p_{14}}{1 + p_{13} z} + p_{15} \varphi, \\
 t &= \sin^2 \left( \frac{2\pi \varphi}{0.321750554} \right), \quad z = \cos^2 \varphi.
 \end{aligned} \tag{19}$$

В области IV:

$$\begin{aligned}
A &= p_1 v_2^2 + p_2 v_1^2 + p_3 v_2^2 v_1^2 + p_4 v_2^6, \\
B &= \sqrt{1 + p_6 v_2^2 + p_7 v_1^2 + p_5 v_2^8 + p_8 v_2^6}, \\
C &= 1 + p_9 v_1^4 + p_{10} v_1^2 + p_{11} v_2^2 v_1^2.
\end{aligned} \tag{20}$$

Коэффициенты  $p_i$  в выражениях (17)–(20) даны в таблице 6. Ошибка вычислений и аппроксимации не превосходит 5% для тех значений  $v_1$  и  $v_2$ , для которых  $R_{AC}^p \gtrsim 10^{-6}$ . В таблице 7 даны максимальные значения  $v = v_{\max}$  для аппроксимационных формул в областях I, II и III, и максимальные ошибки аппроксимаций  $\delta_{\max}$  при  $v \leq v_{\max}$  в этих областях. Эти максимальные ошибки возникают при  $v \sim v_{\max}$ , то есть когда факторы подавления очень малы (и таким образом не влияют на полное нейтринное энергосвечение). При  $v > v_{\max}$  наши аппроксимационные формулы становятся ненадежными и мы рекомендуем полагать соответствующие факторы подавления в компьютерных программах равными нулю.



Если в пульсирующей звезде разрешен неравновесный прямой урка-процесс, то для него можно ввести величины  $Q_{\text{noneq}}$  и  $Q_{\text{bulk}}$ , удовлетворяющие соотношениям (4.11) и (4.30). Мы обозначим их через  $Q_{\text{noneq}}^{(D)}(y)$  и  $Q_{\text{bulk}}^{(D)}(y)$  и возьмем из обзора Яковлева и др. [179]. Усредняя по периоду колебаний, получим:

$$\overline{Q}_{\text{noneq}}^{(D)} = Q_{\text{eq}}^{(D)} \left( 1 + \frac{1071\pi^2 y_0^2}{914} + \frac{945\pi^4 y_0^4}{3656} + \frac{105\pi^6 y_0^6}{7312} \right), \quad (21)$$

$$\overline{Q}_{\text{bulk}}^{(D)} = \frac{714\pi^2}{457} Q_{\text{eq}}^{(D)} \left( \frac{y_0^2}{2} + \frac{15\pi^2 y_0^4}{68} + \frac{5\pi^4 y_0^6}{272} \right). \quad (22)$$

Здесь  $Q_{\text{eq}}^{(D)}$  – скорость нейтринного энерговыделения для равновесного прямого урка-процесса (см. формулу 3.10); как и раньше,  $y_0 = \delta\mu/(\pi^2 k_B T)$ . При исследовании пульсаций звезды с разрешенным прямым урка-процессом величины  $\overline{Q}_{\text{noneq}}^{(D)}$  и  $\overline{Q}_{\text{bulk}}^{(D)}$  следует включать в  $\overline{Q}_{\text{noneq}}$  и  $\overline{Q}_{\text{bulk}}$  в уравнениях (4.32) и (4.40). В отсутствие сверхтекучести нуклонов вклад прямого урка-процесса в  $\overline{Q}_{\text{noneq}}^{(D)}$  и  $\overline{Q}_{\text{bulk}}^{(D)}$  на 5–7 порядков выше, чем вклад модифицированного урка-процесса.

Функцию  $\Phi_\alpha(v)$ , задаваемую формулой (5.43), можно представить в виде:

$$\Phi_\alpha(v) = 2 \int_0^\infty dx \frac{\exp(\sqrt{x^2 + v^2})}{[\exp(\sqrt{x^2 + v^2}) + 1]^2}. \quad (23)$$

Здесь  $v = \Delta(T)/T$ , где  $\Delta(T)$  – щель, зависящая от типа спаривания. В случае синглетного спаривания нуклонов сорта  $\alpha$  функция  $v$  может быть аппроксимирована выражением (см. Левенфиш и Яковлев [94]):

$$v = \frac{\Delta^{(\alpha)}(T)}{T} = \sqrt{1 - \tau} \left( 1.456 - \frac{0.157}{\sqrt{\tau}} + \frac{1.764}{\tau} \right), \quad \tau = \frac{T}{T_{c\alpha}}. \quad (24)$$

В случае триплетного спаривания нейтронов мы используем эффективную щель, которая определяется формулой (5.58) (см. раздел 5.4.1). Функция  $v$  может быть теперь аппроксимирована зависимостью (см. Яковлев и Левенфиш [175]):

$$v = \frac{\Delta_{\text{eff}}^{(n)}(T)}{T} = \sqrt{1 - \tau} \left( 0.7893 + \frac{1.188}{\tau} \right), \quad \tau = \frac{T}{T_{cn}}. \quad (25)$$

Функция  $\Phi_\alpha(v)$  была рассчитана численно Гнединым и Яковлевым [34] в широком диапазоне значений параметра  $v$ . Результаты расчета аппроксимированы формулой, справедливой для любых  $v$  и удовлетворяющей асимптотике  $\Phi_\alpha = \sqrt{2\pi v} e^{-v}$  при  $v \rightarrow +\infty$ :

$$\Phi_\alpha = \left[ 0.9443 + \sqrt{(0.0557)^2 + (0.1886v)^2} \right]^{1/2} \exp \left( 1.753 - \sqrt{(1.753)^2 + v^2} \right). \quad (26)$$

Ошибки аппроксимации не превосходят 2.6%.

### Симметричное ядерное вещество

В симметричном ядерном веществе  $\delta = 0$ . Введем волновое число  $k_{\text{Fsym}} = (3\pi^2 n_b/2)^{1/3}$ . Графики функций  $F_1$  и  $F'_1$  в зависимости от  $k_{\text{Fsym}}$  даны для потенциалов взаимодействий ВJ v6 и Reid v6 в работе Джэксона и др. [53] (см. также раздел 5.4.2). Мы аппроксимировали эти функции простыми аналитическими формулами, справедливыми при  $1.2 \text{ фм}^{-1} \leq k_{\text{Fsym}} \leq 2.0 \text{ фм}^{-1}$ .

Для взаимодействия ВJ v6 мы получили:

$$F_1(n_b, 0) = -0.6854 + 0.6724 k_{\text{Fsym}} - 0.5180 (k_{\text{Fsym}})^2, \quad (27)$$

$$F'_1(n_b, 0) = 1.723 - 1.520 k_{\text{Fsym}} + 0.03498 (k_{\text{Fsym}})^2, \quad (28)$$

а для взаимодействия Reid v6:

$$F_1(n_b, 0) = 1.034 - 1.866 k_{\text{Fsym}} + 0.5455 (k_{\text{Fsym}})^2, \quad (29)$$

$$F'_1(n_b, 0) = 0.6973 + 0.1403 k_{\text{Fsym}} - 0.5303 (k_{\text{Fsym}})^2. \quad (30)$$

### Чистое нейтронное вещество

В чистом нейтронном веществе  $\delta = 1$ . В работе Джэксона и др. [53] приведены зависимости  $F_1$  от волнового числа  $k_{\text{Fpure}} = (3\pi^2 n_b)^{1/3}$  (см. раздел 5.4.2).

Для взаимодействия ВJ v6 наша аппроксимационная формула имеет вид:

$$F_1(n_b, 1) = 0.1473 + 0.7372 k_{\text{Fpure}} - 1.0414 (k_{\text{Fpure}})^2 + 0.1958 (k_{\text{Fpure}})^3, \quad (31)$$

а для взаимодействия Reid v6:

$$F_1(n_b, 1) = -0.2729 + 1.5545 k_{\text{Fpure}} - 1.3225 (k_{\text{Fpure}})^2 + 0.2393 (k_{\text{Fpure}})^3. \quad (32)$$

Формулы (31) и (32) правильно описывают поведение функции  $F_1(n_b, 1)$  в интервале  $0.75 \text{ фм}^{-1} \leq k_{\text{Fpure}} \leq 3.0 \text{ фм}^{-1}$ .