

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ им. А. Ф. ИОФФЕ  
НАУЧНО-ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР

**Г. Г. Зегря, Д. А. Паршин**

**МОМЕНТ ИМПУЛЬСА.  
ДИНАМИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА**

**(конспект лекций по общему курсу физики)**

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ

## Изотропия пространства. Закон сохранения момента импульса. Движение в центральном поле

Итак, мы пришли к выводу, что законы сохранения импульса и энергии связаны со свойствами однородности пространства-времени. Третий важный закон сохранения получается, если пространство **изотропно**, то есть если повороты на произвольный угол вокруг произвольной оси не изменяют потенциальную энергию системы.

Рассмотрим замкнутую систему, состоящую из  $N$  материальных точек. Потенциальная энергия этой системы является функцией координат материальных точек:

$$U = U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N). \quad (9.1)$$

Произведем теперь бесконечно малый поворот системы и потребуем, чтобы ее потенциальная энергия оставалась при этом неизменной. Для этого введем вектор бесконечно малого поворота  $\delta\boldsymbol{\varphi}$ , величина которого равна углу  $\delta\varphi$  поворота, а направление совпадает с осью поворота (причем так, что направление поворота отвечает правилу винта по отношению к направлению  $\delta\boldsymbol{\varphi}$ ).

При таком повороте каждая материальная точка системы, характеризуемая радиус-вектором  $\mathbf{r}_a$ , сместится на величину:

$$\delta\mathbf{r}_a = [\delta\boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{r}_a]. \quad (9.2)$$

В результате потенциальная энергия получит приращение

$$\delta U = \sum_a \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_a} \cdot \delta\mathbf{r}_a = \sum_a \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_a} \cdot [\delta\boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{r}_a]. \quad (9.3)$$

Но в соответствии со вторым законом Ньютона производная  $\partial U / \partial \mathbf{r}_a$  равна

$$\dot{\mathbf{p}}_a = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_a}. \quad (9.4)$$

Следовательно,

$$\delta U = -\sum_a \dot{\mathbf{p}}_a \cdot [\delta\boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{r}_a]. \quad (9.5)$$

Произведем в этом равенстве циклическую перестановку векторов, при которой векторное произведение не изменяется:

$$\mathbf{A} \cdot [\mathbf{B} \times \mathbf{C}] = \mathbf{C} \cdot [\mathbf{A} \times \mathbf{B}] = \mathbf{B} \cdot [\mathbf{C} \times \mathbf{A}] \quad (9.6)$$

(что выражает неизменность объема параллелепипеда, построенного на векторах  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{C}$ ). В результате этой перестановки, вынося  $\delta\boldsymbol{\varphi}$  за знак суммы, имеем

$$\delta U = -\sum_a \delta\boldsymbol{\varphi} \cdot [\mathbf{r}_a \times \dot{\mathbf{p}}_a] = -\delta\boldsymbol{\varphi} \cdot \sum_a [\mathbf{r}_a \times \dot{\mathbf{p}}_a]. \quad (9.7)$$

Это изменение потенциальной энергии должно быть равно нулю при любом  $\delta\boldsymbol{\varphi}$  в силу изотропии пространства. Следовательно,

$$\sum_a [\mathbf{r}_a \times \dot{\mathbf{p}}_a] = 0. \quad (9.8)$$

Прибавим к этому равенству очевидное соотношение

$$\sum_a [\dot{\mathbf{r}}_a \times \mathbf{p}_a] = 0 \quad (9.9)$$

(поскольку  $\dot{\mathbf{r}}_a = \mathbf{v}_a$ , а  $\mathbf{p}_a = m_a \mathbf{v}_a$ , то  $[\dot{\mathbf{r}}_a \times \mathbf{p}_a] = m_a [\mathbf{v}_a \times \mathbf{v}_a] = 0$  как векторное произведение двух коллинеарных векторов). В результате

$$\sum_a ([\mathbf{r}_a \times \dot{\mathbf{p}}_a] + [\dot{\mathbf{r}}_a \times \mathbf{p}_a]) = 0. \quad (9.10)$$

Выражение, стоящее в круглых скобках, представляет собой полную производную по времени от векторного произведения  $[\mathbf{r}_a \times \mathbf{p}_a]$ :

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{r}_a \times \mathbf{p}_a] = [\dot{\mathbf{r}}_a \times \mathbf{p}_a] + [\mathbf{r}_a \times \dot{\mathbf{p}}_a]. \quad (9.11)$$

Следовательно,

$$\frac{d}{dt} \left( \sum_a [\mathbf{r}_a \times \mathbf{p}_a] \right) = 0. \quad (9.12)$$

Поэтому для замкнутой системы величина

$$\mathbf{M} = \sum_a [\mathbf{r}_a \times \mathbf{p}_a] = \text{const} \quad (9.13)$$

остаётся постоянной в процессе движения. Она называется **моментом импульса**<sup>1</sup> системы и представляет собой аксиальный вектор. Как следует из его определения, момент импульса — величина аддитивная, что означает, что момент импульса системы равен сумме моментов импульсов составляющих ее материальных точек. Так же как и в случае импульса, аддитивность этой величины на зависит от наличия или отсутствия взаимодействия между частицами.

В результате у замкнутой системы при движении сохраняются следующие величины: энергия

$$E = \sum_a \frac{m_a v_a^2}{2} + U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N), \quad (9.14)$$

импульс

$$\mathbf{P} = \sum_a m_a \mathbf{v}_a, \quad (9.15)$$

и момент импульса

$$\mathbf{M} = \sum_a [\mathbf{r}_a \times \mathbf{p}_a]. \quad (9.16)$$

Поскольку в определение момента импульса входят радиус-векторы частиц, то его значение, вообще говоря, зависит от выбора начала координат. Радиус-векторы  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{r}'$  одной и той же точки по отношению к началам, отстоящим на вектор  $\mathbf{b}$ , связаны соотношением  $\mathbf{r}_a = \mathbf{r}'_a + \mathbf{b}$ . Поэтому имеем

$$\mathbf{M} = \sum_a [\mathbf{r}_a \times \mathbf{p}_a] = \sum_a [\mathbf{r}'_a \times \mathbf{p}_a] + [\mathbf{b} \times \sum_a \mathbf{p}_a], \quad (9.17)$$

или

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}' + [\mathbf{b} \times \mathbf{P}], \quad (9.18)$$

где  $\mathbf{P} = \sum_a \mathbf{p}_a$  — суммарный импульс системы. Из этой формулы видно, что только в том случае, когда система как целое покоится (то есть когда  $\mathbf{P} = 0$ ), ее момент импульса не зависит от выбора начала координат. На законе сохранения момента импульса эта неопределенность его значения, разумеется, не сказывается, так как у замкнутой системы импульс тоже сохраняется.

Хотя закон сохранения всех трех компонент момента импульса (относительно произвольного начала координат) справедлив только для замкнутой системы, в более ограниченном виде этот закон может распространяться и на системы, находящиеся во внешнем силовом поле (гравитационном, электромагнитном). Из приведенного выше вывода видно, что всегда сохраняется проекция момента на такую ось, относительно которой данное поле симметрично, и поэтому механические свойства системы не изменяются при любом повороте вокруг этой оси; при этом, конечно, момент должен быть определен относительно какой-нибудь точки (начала координат), лежащей на этой оси.

Наиболее важным случаем такого рода является поле с **центральной симметрией**, то есть поле, в котором потенциальная энергия зависит только от расстояния до некоторой определенной точки (центра) в пространстве. Очевидно, что при движении в таком поле сохраняется проекция момента на любую ось, проходящую через центр. Другими словами, сохраняется вектор  $\mathbf{M}$  момента, определенного не относительно произвольной точки пространства, а относительно центра поля (пример — движение планеты в поле силы тяжести Солнца).

Другой пример — поле, обладающее **цилиндрической симметрией** относительно оси  $z$ , в котором сохраняется проекция момента  $M_z$ , причем, как уже было сказано, начало координат должно быть выбрано на оси симметрии.

Если имеется однородное поле вдоль оси  $z$ , то и здесь сохраняется величина  $M_z$ , но начало координат уже может быть выбрано произвольным образом. В конкретной задаче это может быть, например, однородное магнитное или электрическое поле.

<sup>1</sup>Ее также называют **механическим моментом**. В англоязычной литературе она называется **угловым моментом**.

## Закон сохранения момента количества движения и третий закон Ньютона

Рассмотрим замкнутую систему, которая состоит из двух материальных точек, взаимодействующих друг с другом силами  $\mathbf{F}_{12}$  и  $\mathbf{F}_{21}$ . Согласно третьему закону Ньютона,  $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$ , а из закона сохранения момента импульса следует соотношение

$$[\mathbf{r}_1 \times \mathbf{p}_1] + [\mathbf{r}_2 \times \mathbf{p}_2] = \text{const.} \quad (9.19)$$

Продифференцируем это уравнение по времени:

$$[\mathbf{r}_1 \times \dot{\mathbf{p}}_1] + [\mathbf{r}_2 \times \dot{\mathbf{p}}_2] = 0 \quad (9.20)$$

или, воспользовавшись вторым законом Ньютона, получим

$$[\mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_{12}] + [\mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_{21}] = 0. \quad (9.21)$$

Так как  $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$ , то

$$[(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \times \mathbf{F}_{12}] = 0. \quad (9.22)$$

Отсюда следует, что векторы  $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$  и  $\mathbf{F}_{12}$  коллинеарны. Коллинеарны также векторы  $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$  и  $\mathbf{F}_{21}$ . Это значит, что силы  $\mathbf{F}_{12}$  и  $\mathbf{F}_{21}$  направлены вдоль прямой, соединяющей две взаимодействующие материальные точки. Вместе с равенством сил  $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$  это как раз и составляет содержание третьего закона Ньютона.

Поэтому, обращая эти рассуждения, мы приходим к выводу, что можно было бы вывести закон сохранения момента импульса из второго и третьего законов Ньютона. Но при этом связь этого закона сохранения с изотропией пространства не была бы столь очевидной.

## Движение в центральном поле

Рассмотрим задачу об относительном движении двух взаимодействующих частиц, которая допускает полное решение в общем виде, — **задачу двух тел**. Потенциальная энергия взаимодействия двух частиц зависит лишь от расстояния между ними, то есть от абсолютной величины разности их радиус-векторов. Энергия такой системы может быть представлена в виде

$$E = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} + U(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|). \quad (9.23)$$

Введем вектор взаимного расстояния обеих точек

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 \quad (9.24)$$

и поместим начало координат в центр инерции, что дает

$$m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 = 0. \quad (9.25)$$

Из двух последних равенств находим

$$\mathbf{r}_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{r} \quad \text{и} \quad \mathbf{r}_2 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{r}. \quad (9.26)$$

Дифференцируя эти выражения по времени, получаем

$$\mathbf{v}_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{v} \quad \text{и} \quad \mathbf{v}_2 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{v}, \quad (9.27)$$

где  $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$  — относительная скорость движения двух материальных точек. Кинетическая энергия равна

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 &= \frac{1}{2} m_1 \frac{m_2^2}{(m_1 + m_2)^2} v^2 + \frac{1}{2} m_2 \frac{m_1^2}{(m_1 + m_2)^2} v^2 = \\ &= \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} v^2 = \frac{1}{2} m v^2, \end{aligned} \quad (9.28)$$

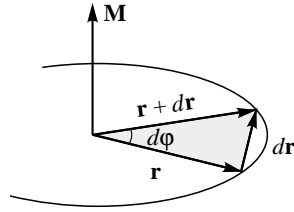


Рис. 9.1. Связь момента с секториальной скоростью.

где мы ввели обозначение

$$m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}. \quad (9.29)$$

Величина  $m$  называется **приведенной массой**. В результате в системе центра инерции полная энергия равна

$$E = \frac{1}{2} m v^2 + U(r). \quad (9.30)$$

Таким образом, задача двух тел свелась к движению одной материальной точки с приведенной массой в **центральной** поле  $U(r)$ . Центральным называется поле, потенциальная энергия которого зависит лишь от расстояния до определенной неподвижной точки.

Как мы уже говорили, при движении в центральном поле сохраняется момент импульса относительно центра поля. Для одной частицы

$$\mathbf{M} = [\mathbf{r} \times \mathbf{p}]. \quad (9.31)$$

Поскольку векторы  $\mathbf{M}$  и  $\mathbf{r}$  взаимно перпендикулярны, постоянство момента (в данном случае по направлению) означает, что при движении частицы ее радиус-вектор  $\mathbf{r}$  все время остается в одной плоскости, перпендикулярной к вектору  $\mathbf{M}$ .

При движении одной материальной точки закон сохранения момента импульса имеет простой геометрический смысл. Введем вектор  $ds$ , величина которого равна площади, описываемой радиус-вектором частицы  $\mathbf{r}$  за время  $dt$  (перемещение при этом равно  $d\mathbf{r}$ ), а направление совпадает с нормалью к плоскости движения<sup>2</sup>. Тогда, как следует из рис. 9.1,

$$ds = \frac{1}{2} [\mathbf{r} \times (\mathbf{r} + d\mathbf{r})] = \frac{1}{2} [\mathbf{r} \times d\mathbf{r}]. \quad (9.32)$$

Поделив это равенство на  $dt$ , имеем

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{2} \left[ \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right] = \frac{1}{2} [\mathbf{r} \times \mathbf{v}] = \frac{1}{2m} [\mathbf{r} \times \mathbf{p}] = \frac{\mathbf{M}}{2m}, \quad (9.33)$$

или

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{2m} \mathbf{M}. \quad (9.34)$$

Величина  $\dot{s} = ds/dt$  определяет площадь, описываемую радиус вектором частицы в единицу времени. Она называется **секториальной скоростью**. Таким образом, сохранение момента означает постоянство секториальной скорости, то есть

**при движении в центральном поле за равные промежутки времени радиус-вектор движущейся точки описывает равные площади.**

Это есть так называемый второй закон Кеплера, 1609 г. .

Секториальную скорость можно выразить через скорость изменения угла  $\varphi$  со временем. Для этого разложим вектор  $d\mathbf{r}$  на две компоненты, параллельную и перпендикулярную вектору  $\mathbf{r}$ ,  $d\mathbf{r} = d\mathbf{r}_{\parallel} + d\mathbf{r}_{\perp}$ . Тогда

$$ds = \frac{1}{2} [\mathbf{r} \times d\mathbf{r}] = \frac{1}{2} [\mathbf{r} \times (d\mathbf{r}_{\parallel} + d\mathbf{r}_{\perp})]. \quad (9.35)$$

Поскольку  $[\mathbf{r} \times d\mathbf{r}_{\parallel}] = 0$ , а  $d\mathbf{r}_{\perp} = [d\varphi \times \mathbf{r}]$ , то

$$\begin{aligned} ds &= \frac{1}{2} [\mathbf{r} \times d\mathbf{r}_{\perp}] = \frac{1}{2} [\mathbf{r} \times [d\varphi \times \mathbf{r}]] = \\ &= \frac{1}{2} d\varphi r^2 - \frac{1}{2} \underbrace{\mathbf{r} (d\varphi \cdot \mathbf{r})}_{=0} = \frac{1}{2} r^2 d\varphi, \end{aligned} \quad (9.36)$$

<sup>2</sup>Направление нормали выбирается так, чтобы вектора  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{r} + d\mathbf{r}$  и  $ds$  образовывали правую тройку (правило буравчика).

поэтому

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{2m} \mathbf{M}. \quad (9.37)$$

Следовательно,

$$\mathbf{M} = mr^2 \dot{\varphi}. \quad (9.38)$$

Полное решение задачи о движении в центральном поле проще всего получить исходя из законов сохранения энергии и момента, не выписывая при этом самих уравнений движения. При этом нам будет удобно пользоваться не декартовыми координатами  $x$  и  $y$  в плоскости, в которой происходит движение, а так называемыми **полярными координатами**, в которых положение материальной точки задается координатами  $r$  и  $\varphi$  (рис. 9.2).

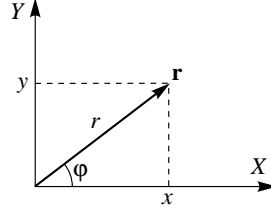


Рис. 9.2. Полярные координаты.

Потенциальная энергия зависит лишь от координаты  $r$ , так что ее преобразовывать не нужно. Кинетическая энергия определяется квадратом скорости частицы. В декартовых координатах

$$\begin{aligned} v^2 &= v_x^2 + v_y^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \\ &= \frac{(dx)^2 + (dy)^2}{(dt)^2} \equiv \frac{(dl)^2}{(dt)^2}. \end{aligned} \quad (9.39)$$

Нам надо преобразовать эту величину к полярным координатам. Из рис. 9.3 следует, что квадрат элемента длины в полярных координатах равен  $(dl)^2 = (dr)^2 + r^2(d\varphi)^2$ , поэтому

$$v^2 = \frac{(dl)^2}{(dt)^2} = \frac{(dr)^2 + r^2(d\varphi)^2}{(dt)^2} = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2. \quad (9.40)$$

В результате полную энергию системы можно представить в виде

$$\begin{aligned} E &= \frac{mv^2}{2} + U(r) = \frac{1}{2}m \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}mr^2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + U(r) \equiv \\ &\equiv \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\varphi}^2 + U(r). \end{aligned} \quad (9.41)$$

Но производная  $d\varphi/dt$  связана с сохраняющейся величиной момента  $M_z = M = mr^2 d\varphi/dt$ . Поэтому, подставляя в выражение для энергии

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{M}{mr^2}, \quad (9.42)$$

получим

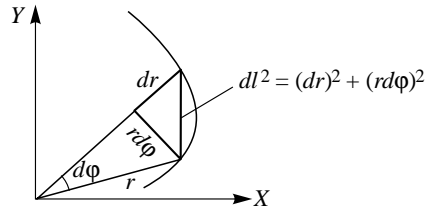
$$E = \frac{1}{2}m \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{M^2}{2mr^2} + U(r). \quad (9.43)$$

Отсюда можно выразить радиальную скорость частицы

$$\dot{r} \equiv \frac{dr}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2}{m} \left[ E - U(r) - \frac{M^2}{2mr^2} \right]}. \quad (9.44)$$

Это есть дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными для определения функции  $r(t)$ . Интегрируя, получим

$$\int \frac{dr}{\pm \sqrt{\frac{2}{m} \left[ E - U(r) - \frac{M^2}{2mr^2} \right]}} = \int dt + \text{const}. \quad (9.45)$$



**Рис. 9.3.** Элемент длины в полярных координатах.

Таким образом, если мы сумеем вычислить интеграл, мы найдем связь  $r$  с  $t$ , а потом из закона сохранения момента импульса можно будет найти зависимость  $\varphi$  от  $t$ :

$$d\varphi = \frac{M}{mr^2} dt, \quad (9.46)$$

или

$$\varphi = \int \frac{\frac{M}{mr^2} dr}{\sqrt{\frac{2}{m} \left[ E - U(r) - \frac{M^2}{2mr^2} \right]}} + \text{const.} \quad (9.47)$$

Это есть уравнение траектории частицы в полярных координатах.

Выражение для энергии показывает, что радиальную часть движения можно рассматривать как одномерное движение в поле с “эффективной” потенциальной энергией

$$U(r) = U(r) + \frac{M^2}{2mr^2}. \quad (9.48)$$

Величину  $M^2/2mr^2$  называют **центробежной энергией**.

Значения  $r$ , при которых

$$U(r) + \frac{M^2}{2mr^2} = E, \quad (9.49)$$

определяют границы области движения по расстоянию от центра. При выполнении этого равенства радиальная скорость  $\dot{r}$  обращается в нуль. Это не означает остановки частицы (как при истинном одномерном движении), так как угловая скорость  $\dot{\varphi}$  нигде не обращается в нуль. Равенство  $\dot{r} = 0$  описывает точку поворота траектории, в которой функция  $r(t)$  переходит от увеличения к уменьшению или наоборот.

## Задача Кеплера. Резерфордское рассеяние

Важнейшим случаем центральных полей являются поля, в которых потенциальная энергия обратно пропорциональна  $r$  и, соответственно, силы обратно пропорциональны  $r^2$ . Сюда относятся ньютоновские поля тяготения и кулоновские электростатические поля. Первые, как известно, имеют характер притяжения, а вторые могут быть как полями притяжения, так и полями отталкивания.

Рассмотрим сначала поле притяжения

$$U = -\frac{\alpha}{r} \quad (U \rightarrow 0 \text{ при } r \rightarrow \infty), \quad (10.1)$$

где  $\alpha = Gm_1m_2 > 0$  в случае гравитационного взаимодействия двух масс  $m_1$  и  $m_2$ . Тогда эффективная потенциальная энергия равна

$$U(r) = -\frac{\alpha}{r} + \frac{M^2}{2mr^2}, \quad (10.2)$$

где, напомним,  $m$  есть приведенная масса.

График этой функции изображен на рис. 10.1. При  $r = M^2/m\alpha$  она имеет минимум, равный<sup>1</sup>

$$(U)_{\min} = -\frac{m\alpha^2}{2M^2}. \quad (10.3)$$

Из характера зависимости  $U(r)$  следует, что движение является финитным при  $E < 0$  и инфинитным при  $E > 0$  (см. рис. 10.2). Из рис. 10.2 также видно, что в центр поля ( $r = 0$ ) невозможно попасть ни при какой энергии, что означает невозможность падения частицы на центр в этой задаче. Физическая причина — наличие центробежной энергии, которая при  $r \rightarrow 0$  быстро возрастает пропорционально  $1/r^2$ .

Найдем теперь область движения по радиусу в случае финитного движения, то есть при  $E < 0$ . Для этого надо решить уравнение

$$U = E \quad \text{или} \quad -\frac{\alpha}{r} + \frac{M^2}{2mr^2} - E = 0. \quad (10.4)$$

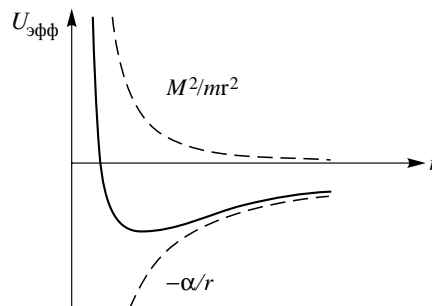
Это уравнение квадратное относительно  $1/r$ . Его решение таково:

$$\left(\frac{1}{r}\right)_{1,2} = \frac{\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + 4E\frac{M^2}{2m}}}{2 \cdot \frac{M^2}{2m}} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + \frac{2EM^2}{m\alpha^2}}}{\frac{M^2}{m\alpha}}. \quad (10.5)$$

Введем обозначения

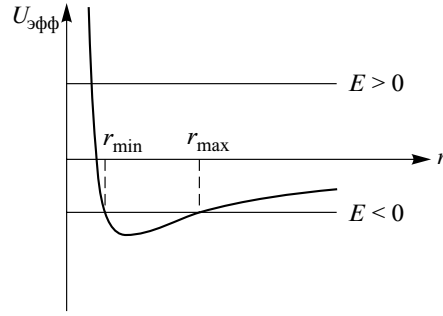
$$p = \frac{M^2}{m\alpha} \quad \text{и} \quad \varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2EM^2}{m\alpha^2}}. \quad (10.6)$$

<sup>1</sup>Положение минимума определяется из условия равенства нулю производной  $dU/dr = 0$ .



**Рис. 10.1.** Эффективная потенциальная энергия в кеплеровой задаче в поле притяжения.





**Рис. 10.2.** Области финитного и инфинитного движения.

Заметим, что так как  $E < 0$ , то  $\varepsilon < 1$ ! Пользуясь этими обозначениями, два корня квадратного уравнения можно представить в виде

$$\left(\frac{1}{r}\right)_{1,2} = \frac{1 \pm \varepsilon}{p}. \quad (10.7)$$

Отсюда минимальное и максимальное удаление от центра поля равны

$$r_{\min} = \frac{p}{1 + \varepsilon} \quad \text{и} \quad r_{\max} = \frac{p}{1 - \varepsilon}. \quad (10.8)$$

Случай  $\varepsilon = 0$ , очевидно, соответствует движению по окружности. Этому соответствует наименьшее допустимое значение энергии  $E$ , совпадающее с (10.3).

Найдем теперь траекторию, по которой движется частица. Одна из возможностей — это непосредственное вычисление интеграла

$$\varphi = \int \frac{\frac{M}{mr^2} dr}{\sqrt{\frac{2}{m} \left[ E - U(r) - \frac{M^2}{2mr^2} \right]}} + \text{const} \quad (10.9)$$

с потенциальной энергией  $U(r) = -\alpha/r$ . Таким образом мы найдем зависимость  $r(\varphi)$ , то есть уравнение траектории, в полярных координатах. Однако здесь мы выберем другой путь, не связанный с утомительными вычислениями интегралов. Для этого сначала убедимся в том, что векторная величина

$$\mathbf{A} = [\mathbf{v} \times \mathbf{M}] - \frac{\alpha \mathbf{r}}{r} \quad (10.10)$$

является интегралом движения в нашей задаче, то есть что она не изменяется со временем.

Для доказательства этого утверждения вычислим производную

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = [\dot{\mathbf{v}} \times \mathbf{M}] - \frac{\alpha \mathbf{v}}{r} + \frac{\alpha \mathbf{r}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{r})}{r^3}. \quad (10.11)$$

При получении последнего слагаемого мы воспользовались тем, что радиальная скорость  $\dot{r}$  может быть представлена в виде

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{r}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}), \quad (10.12)$$

то есть как проекция вектора скорости  $\mathbf{v}$  на направление радиус-вектора  $\mathbf{r}$ .

Подставим теперь в (10.11) выражение для момента количества движения  $\mathbf{M} = [\mathbf{r} \times m\mathbf{v}]$  и раскроем двойное векторное произведение:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{A}}{dt} &= [\dot{\mathbf{v}} \times [\mathbf{r} \times m\mathbf{v}]] - \frac{\alpha \mathbf{v}}{r} + \frac{\alpha \mathbf{r}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{r})}{r^3} = \\ &= \mathbf{r}(\mathbf{v} \cdot m\dot{\mathbf{v}}) - \mathbf{v}(\mathbf{r} \cdot m\dot{\mathbf{v}}) - \frac{\alpha \mathbf{v}}{r} + \frac{\alpha \mathbf{r}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{r})}{r^3}. \end{aligned} \quad (10.13)$$

Вместо  $m\dot{\mathbf{v}}$  подставим величину силы:

$$m\dot{\mathbf{v}} = -\alpha \frac{\mathbf{r}}{r^3}. \quad (10.14)$$

В результате

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \mathbf{r}(\mathbf{v} \cdot (-\alpha \frac{\mathbf{r}}{r^3})) - \mathbf{v}(\mathbf{r} \cdot (-\alpha \frac{\mathbf{r}}{r^3})) - \frac{\alpha \mathbf{v}}{r} + \frac{\alpha \mathbf{r}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{r})}{r^3}. \quad (10.15)$$

Легко видеть, что первый и последний, а также второй и третий члены в этом выражении попарно сокращаются, и в результате

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = 0, \quad \text{т. е.} \quad \mathbf{A} = \text{const}, \quad (10.16)$$

что и требовалось доказать.

Выберем теперь направление постоянного вектора  $\mathbf{A}$  в качестве оси  $X$  нашей полярной системы координат и обозначим угол между векторами  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{A}$  через  $\varphi$  (рис. 10.3). Умножим равенство (10.10) скалярно на  $\mathbf{r}$ :

$$Ar \cos \varphi = \mathbf{r} \cdot [\mathbf{v} \times \mathbf{M}] - \alpha r. \quad (10.17)$$

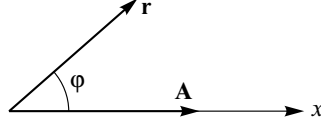


Рис. 10.3. Выбор полярной системы координат.

В смешанном произведении циклически переставим сомножители:

$$Ar \cos \varphi = \mathbf{M} \cdot \underbrace{[\mathbf{r} \times \mathbf{v}]}_{\mathbf{M}/m} - \alpha r, \quad (10.18)$$

или

$$Ar \cos \varphi = \frac{M^2}{m} - \alpha r. \quad (10.19)$$

Разрешая это уравнение относительно  $r$ , получаем

$$r = \frac{M^2/m}{A \cos \varphi + \alpha} = \frac{M^2/m\alpha}{1 + \frac{A}{\alpha} \cos \varphi}. \quad (10.20)$$

Поскольку  $A$  и  $\alpha$  у нас положительны, минимальному  $r$  (так называемому **перигелию** орбиты) соответствует  $\varphi = 0$ . Кроме того, согласно (10.6),  $M^2/m\alpha = p$ , поэтому

$$r_{\min} = \frac{p}{1 + \frac{A}{\alpha}}. \quad (10.21)$$

Сравнивая это выражение с (10.8), получаем

$$\frac{A}{\alpha} = \varepsilon, \quad \text{или} \quad A = \alpha\varepsilon = \alpha\sqrt{1 + \frac{2EM^2}{m\alpha^2}}. \quad (10.22)$$

В результате уравнение траектории частицы в полярной системе координат принимает следующий вид:

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi}. \quad (10.23)$$

При  $\varepsilon < 1$  это есть уравнение эллипса,  $p$  — параметр эллипса,  $\varepsilon$  — эксцентриситет. Частным случаем эллипса является окружность, когда  $\varepsilon = 0$ . Как мы покажем ниже, сохраняющийся вектор  $\mathbf{A}$  направлен вдоль большой оси эллипса от фокуса к перигелию. Его постоянство означает неизменность ориентации большой оси эллипса в процессе движения частицы. Часто за определение эллипса принимают такое **эллипс — это геометрическое место точек, сумма расстояний от которых до двух заданных точек  $A$  и  $B$  (фокусов эллипса) есть величина постоянная:**

$$r_1 + r_2 = L = \text{const} \quad (10.24)$$

(смотри рис. 10.4).

Покажем, что из этого определения следует соотношение (10.23). Для этого выберем начало координат в точке  $B$  — фокусе эллипса. Из рис. 10.5 следует, что

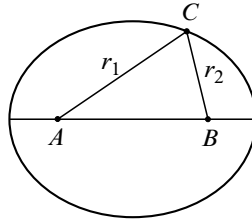


Рис. 10.4. Каноническое определение эллипса.

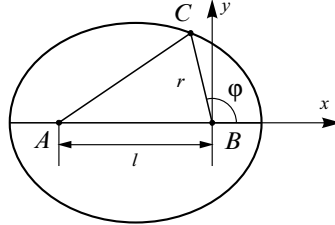


Рис. 10.5. Привязка к осям полярной системы координат.

$$AB = l, \quad BC = r, \quad AC = \sqrt{(l + r \cos \varphi)^2 + (r \sin \varphi)^2}, \quad (10.25)$$

при этом мы воспользовались известной формулой для расстояния между двумя точками:

$$r_{12} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Поскольку роль  $r_1$  и  $r_2$  играют соответственно  $AC$  и  $BC$ , то условие  $r_1 + r_2 = L = \text{const}$  можно переписать в виде

$$r + \sqrt{(l + r \cos \varphi)^2 + (r \sin \varphi)^2} = L, \quad (10.26)$$

или

$$\sqrt{l^2 + 2lr \cos \varphi + r^2} = L - r. \quad (10.27)$$

Возводя обе части этого равенства в квадрат и сокращая на  $r^2$ , получаем

$$l^2 + 2lr \cos \varphi = L^2 - 2Lr. \quad (10.28)$$

Переписывая это выражение в виде

$$L^2 - l^2 = 2r(L + l \cos \varphi), \quad (10.29)$$

или

$$\underbrace{\frac{L^2 - l^2}{2L}}_p = r \left( 1 + \underbrace{\frac{l}{L} \cos \varphi}_\varepsilon \right), \quad (10.30)$$

мы приходим к соотношению (10.23), где эксцентриситет  $\varepsilon$  и параметр эллипса  $p$  равны

$$\varepsilon = \frac{l}{L} \quad \text{и} \quad p = \frac{L^2 - l^2}{2L} = \frac{L}{2}(1 - \varepsilon^2). \quad (10.31)$$

Отсюда следует, что

$$L = \frac{2p}{1 - \varepsilon^2}. \quad (10.32)$$

Каноническое уравнение эллипса в декартовой системе координат имеет вид

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1, \quad (10.33)$$

где  $a$  — большая полуось,  $b$  — малая. Таким образом, как видно из рис. 10.6,  $2a = L$ . Из того же рисунка также следует, что малая полуось эллипса  $b$  равна

$$b = \sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2} = \frac{L}{2} \sqrt{1 - \varepsilon^2} = \frac{p}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}. \quad (10.34)$$

В результате мы получили полезные выражения для большой и малой полуосей эллипса через его параметр  $p$  и эксцентриситет  $\varepsilon$ :

$$a = \frac{p}{1 - \varepsilon^2} = \frac{\alpha}{2|E|}, \quad b = \frac{p}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} = \frac{M}{\sqrt{2m|E|}}. \quad (10.35)$$

Период движения частицы по орбите проще всего определить с помощью закона сохранения момента в форме интеграла площадей:

$$\dot{s} = \frac{1}{2m} \mathbf{M}. \quad (10.36)$$

Интегрируя это равенство по времени, получим

$$2ms = M \cdot T, \quad (10.37)$$

где  $T$  — период обращения. Площадь эллипса равна  $s = \pi ab$ , поэтому, учитывая (10.35), получаем

$$MT = 2\pi m \cdot \frac{\alpha}{2|E|} \cdot \frac{M}{\sqrt{2m|E|}}. \quad (10.38)$$

Отсюда, сокращая на  $M$ , получаем окончательно

$$T = \pi\alpha \sqrt{\frac{m}{2|E|^3}}. \quad (10.39)$$

Таким образом, период обращения по орбите зависит только от полной энергии частицы.

Из (10.35) и (10.39) следует, что при движении в центральном поле, создаваемом тяжелой гравитирующей массой, отношение

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{\pi^2 \alpha^2 m / 2|E|^3}{\alpha^3 / 8|E|^3} = 4\pi^2 \frac{m}{\alpha} \quad (10.40)$$

не зависит от параметров движения и массы частицы<sup>2</sup>, то есть определяется только параметрами силового поля, в котором движется частица. Это составляет суть **третьего закона Кеплера**, согласно которому квадраты времен обращения планет относятся, как кубы больших полуосей их эллиптических орбит.

К этому же результату можно прийти, и не выписывая в явном виде решение уравнений движения, а используя другой подход, называемый **методом механического подобия**. Запишем уравнение движения планеты в общем виде

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{\alpha}{r^3} \mathbf{r} \quad (10.41)$$

и произведем масштабное преобразование координат и времени

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &\rightarrow \gamma \mathbf{r}', \\ t &\rightarrow \beta t'. \end{aligned} \quad (10.42)$$

Тогда в новых переменных уравнение (10.41) примет вид

$$\frac{\gamma}{\beta^2} m \frac{d^2 \mathbf{r}'}{(dt')^2} = -\frac{1}{\gamma^2} \frac{\alpha \mathbf{r}'}{(r')^3}. \quad (10.43)$$

<sup>2</sup>В этом случае приведенная масса и масса частицы примерно равны и  $\alpha \propto m$ .

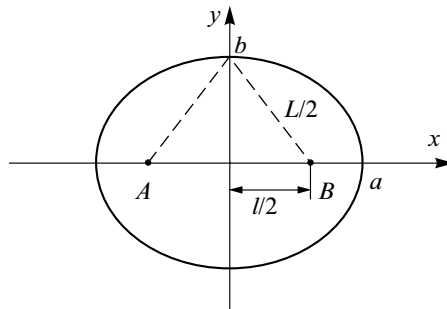


Рис. 10.6. Уравнение эллипса в декартовой системе координат.

Отсюда следует, что если

$$\frac{\gamma}{\beta^2} = \frac{1}{\gamma^2}, \quad \text{или} \quad \gamma^3 = \beta^2, \quad (10.44)$$

то уравнение движения в новых переменных, имеет точно такой же вид как и в старых. Это означает, что если это уравнение допускает движение по какой-то траектории, то оно допускает движение и по геометрически подобной траектории, причем

$$\left(\frac{r}{r'}\right)^3 = \left(\frac{t}{t'}\right)^2, \quad (10.45)$$

то есть квадраты времен прохождения подобных участков траектории относятся, как кубы их линейных размеров. Это и есть третий закон Кеплера, который фактически является следствием того, что сила притяжения  $\sim 1/r^2$ .

Рассмотренный нами случай финитного движения по эллиптической орбите с уравнением траектории в виде

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi}, \quad \text{где} \quad p = \frac{M^2}{m\alpha} \quad \text{и} \quad \varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2EM^2}{m\alpha^2}}, \quad (10.46)$$

выведенной для случая  $E < 0$ , можно обобщить и на случай инфинитного движения, когда  $E \geq 0$ , при этом все три записанные формулы остаются справедливыми. Так, случаю  $E > 0$  ( $\varepsilon > 1$ ) отвечает движение по гиперболе (см. рис. 10.7). Расстояние от перигелия до центра поля равно  $r_{\min} = p/(1+\varepsilon)$ . Случаю  $E = 0$  ( $\varepsilon = 1$ ) отвечает движение по параболе с расстоянием перигелия  $r_{\min} = p/2$ . Этот

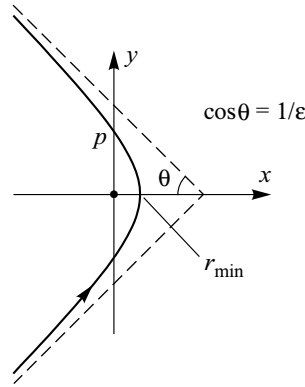


Рис. 10.7. Движение по гиперболе в поле притяжения.

случай имеет место, когда частица начинает свое движение из состояния покоя на бесконечности.

**Почему сгорают метеориты?** Для ответа на этот вопрос воспользуемся принципом механического подобия. Выпишем выражение для полной энергии частицы, приняв во внимание, что  $\gamma^2/\beta^2 = 1/\gamma$ :

$$E = \frac{mv^2}{2} - \frac{\alpha}{r} = \left(\frac{\gamma}{\beta}\right)^2 \frac{m(v')^2}{2} - \frac{1}{\gamma} \frac{\alpha}{r'} = \left(\frac{\gamma}{\beta}\right)^2 E', \quad (10.47)$$

или, поскольку отношение  $\gamma^2/\beta^2$  равно отношению скоростей для геометрически подобных орбит,

$$\left|\frac{E}{E'}\right| = \left(\frac{v}{v'}\right)^2. \quad (10.48)$$

Когда метеорит тормозится в атмосфере, его полная энергия уменьшается и в некий момент из положительной становится отрицательной и продолжает уменьшаться дальше благодаря трению об атмосферу (но увеличивается при этом по абсолютной величине). Скорость при этом растет. Трение становится еще больше и т.д. Метеорит сильно нагревается в результате трения и сгорает.

## Резерфордское рассеяние

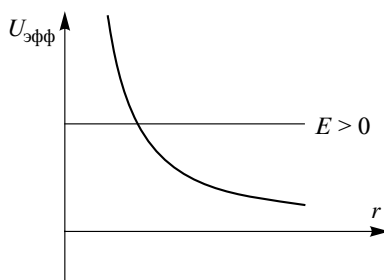
Рассмотрим теперь движение в поле отталкивания, в котором

$$U = \frac{\alpha}{r}, \quad (10.49)$$

где  $\alpha > 0$ . Например, это может быть движение одного заряда  $q_1$  в поле одноименного заряда  $q_2$ , тогда  $\alpha = q_1 q_2$ . В этом случае эффективная потенциальная энергия

$$U = \frac{\alpha}{r} + \frac{M^2}{2mr^2} \quad (10.50)$$

является монотонно убывающей функцией  $r$  (рис. 10.8). Полная энергия частицы  $E$  может быть только положительной, и движение всегда является инфинитным.

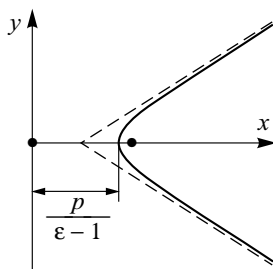


**Рис. 10.8.** Эффективная потенциальная энергия в кеплеровой задаче в поле отталкивания.

Траектория частицы может быть получена тем же самым способом, что и при движении в поле притяжения. Для этого в формуле (10.20) нужно произвести замену  $\alpha \rightarrow -\alpha$ . В результате траектория частицы задается уравнением

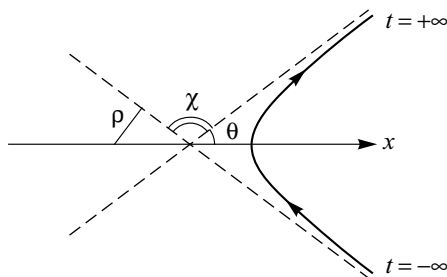
$$r = \frac{p}{\varepsilon \cos \varphi - 1}, \quad \text{где } p = \frac{M^2}{m\alpha} \quad \text{и} \quad \varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2EM^2}{m\alpha^2}} \quad (10.51)$$

(с  $\alpha > 0$ ) и является по-прежнему гиперболой. Центр поля лежит, однако, снаружи гиперболы (рис. 10.9).



**Рис. 10.9.** Движение по гиперболе в поле отталкивания.

Задачу о движении частицы в этом случае часто формулируют как **задачу рассеяния**. Частица при своем движении отклоняется от первоначального направления на угол  $\chi$ . При этом, как следует из



**Рис. 10.10.** Задача рассеяния в кулоновском поле отталкивания.

рис. 10.10, угол отклонения (угол рассеяния)  $\chi$  связан с углом  $\theta$ , под которым наклонены асимптоты гиперболы к оси  $X$ , простым соотношением

$$\chi + 2\theta = \pi, \quad (10.52)$$

поэтому

$$\text{ctg } \frac{\chi}{2} = \text{tg } \theta. \quad (10.53)$$

С другой стороны, угол  $\theta$  определяется из условия обращения в  $\infty$  величины  $r$  в формуле (10.51). Отсюда следует, что

$$\cos \theta = \frac{1}{\varepsilon} \quad (10.54)$$

и

$$\operatorname{ctg} \frac{\chi}{2} = \operatorname{tg} \theta = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \theta} - 1} = \sqrt{\varepsilon^2 - 1} = \sqrt{\frac{2EM^2}{m\alpha^2}}. \quad (10.55)$$

Энергия  $E$  и момент импульса  $M$  определяются из движения частицы при  $t = -\infty$ :

$$E = \frac{mv_\infty^2}{2} \quad \text{и} \quad M = \rho mv_\infty, \quad (10.56)$$

где  $v_\infty$  — скорость налетающей частицы на бесконечности, а  $\rho$  — так называемое **прицельное расстояние**. Подставляя эти величины в формулу (10.55), мы приходим к знаменитой формуле Резерфорда

$$\rho = \frac{\alpha}{mv_\infty^2} \operatorname{ctg} \frac{\chi}{2}, \quad (10.57)$$

связывающей угол рассеяния  $\chi$  с прицельным расстоянием  $\rho$ . Замечательно, что точно такая же формула получается и при движении частицы в поле притяжения  $U = -\alpha/r$ .

## Движение твердого тела. Тензор инерции и энергия вращающегося твердого тела

Мы приступаем теперь к описанию движения **твердого тела** (не одной, а многих материальных точек). Что такое твердое тело? В механике твердое тело определяется как **система материальных точек, расстояния между которыми в процессе движения неизменны** (то есть мы не учитываем деформации).

Для описания движения твердого тела введем две системы координат. Одна — “неподвижная”, инерциальная система координат  $XYZ$  (например наша лаборатория). Другая — движущаяся,  $x_1 = x$ ,  $x_2 = y$  и  $x_3 = z$ , жестко связанная с твердым телом и участвующая во всех его движениях. Как мы увидим впоследствии, начало движущейся системы координат удобно совместить с центром инерции тела.

Поскольку движущаяся система жестко связана с твердым телом, то положение твердого тела относительно неподвижной системы координат однозначно определяется заданием положения движущейся системы (ее начала координат и ориентации осей). Пусть радиус-вектор  $\mathbf{R}$  указывает положение

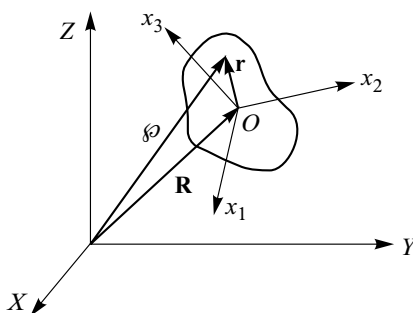


Рис. 11.1. Две системы координат.

ние начала  $O$  движущейся системы (рис. 11.1). Ориентация осей этой системы  $x_1, x_2$  и  $x_3$  относительно неподвижной определяется тремя независимыми углами. В итоге вместе с тремя компонентами вектора  $\mathbf{R}$  мы имеем всего шесть координат. Таким образом,

**всякое твердое тело представляет собой механическую систему с шестью степенями свободы.**

Рассмотрим теперь произвольное бесконечно малое перемещение твердого тела. Его можно себе представить в виде суммы двух частей. Одна часть — это бесконечно малый параллельный перенос тела (когда **все** точки тела смещаются одинаково). В результате этого центр инерции (начало координат подвижной системы!) переходит из начального положения в конечное при неизменной ориентации осей подвижной системы координат. Вторая — бесконечно малый поворот вокруг центра инерции, в результате которого твердое тело переходит в конечное положение (порядок этих двух операций, очевидно, неважен).

Обозначим радиус-вектор произвольной точки твердого тела  $P$  в подвижной системе координат посредством  $\mathbf{r}$ , а радиус-вектор той же точки в неподвижной системе — посредством  $\boldsymbol{\varphi}$ . Тогда бесконечно малое смещение  $d\boldsymbol{\varphi}$  точки  $P$  складывается из перемещения  $d\mathbf{R}$  центра инерции и перемещения  $[d\boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{r}]$  относительно последнего при повороте на бесконечно малый угол  $d\boldsymbol{\varphi}$  вокруг точки  $O$ :

$$d\boldsymbol{\varphi} = d\mathbf{R} + [d\boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{r}]. \quad (11.1)$$

Разделив это равенство на интервал времени  $dt$ , в течение которого произошло данное перемещение, и введя скорости

$$\frac{d\boldsymbol{\varphi}}{dt} = \mathbf{v}, \quad \frac{d\mathbf{R}}{dt} = \mathbf{V}, \quad \frac{d\boldsymbol{\varphi}}{dt} = \boldsymbol{\Omega}, \quad (11.2)$$

получим соотношение между ними

$$\mathbf{v} = \mathbf{V} + [\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}]. \quad (11.3)$$



Скорость  $\mathbf{V}$  — это скорость движения центра инерции твердого тела. Ее называют также скоростью **поступательного** движения твердого тела. Вектор  $\boldsymbol{\Omega}$  называется **угловой скоростью** вращения твердого тела. Его направление и направление  $d\varphi$  совпадают с направлением оси вращения в данный момент времени. Таким образом, скорость  $\mathbf{v}$  любой точки тела (относительно неподвижной системы координат) может быть выражена через поступательную скорость тела  $\mathbf{V}$  и угловую скорость его вращения  $\boldsymbol{\Omega}$ .

## Тензор инерции

Для вычисления кинетической энергии твердого тела представим его как дискретную систему материальных точек. Тогда

$$T = \sum \frac{mv^2}{2}, \quad (11.4)$$

где суммирование производится по всем точкам, составляющим тело. Чтобы избежать громоздких обозначений, здесь и ниже мы опускаем индексы, нумерующие эти точки. Переход от формул, содержащих суммирование по дискретным точкам, к формулам для сплошного тела осуществляется просто заменой масс частиц на массу  $\rho dV$ , заключенную в элементе объема  $dV$  ( $\rho$  — плотность массы), и интегрированием по всему объему тела  $V$ .

Подставим в формулу для кинетической энергии  $T = \sum mv^2/2$  формулу для скорости  $\mathbf{v} = \mathbf{V} + [\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}]$ :

$$T = \sum \frac{m}{2} (\mathbf{V} + [\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}])^2 = \sum \frac{m}{2} V^2 + \sum m \mathbf{V} \cdot [\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}] + \sum \frac{m}{2} [\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}]^2. \quad (11.5)$$

Скорости  $\mathbf{V}$  и  $\boldsymbol{\Omega}$  одинаковы для всех точек твердого тела в данный момент времени. Поэтому в первом члене  $V^2/2$  можно вынести за знак суммы, а сумма  $\sum m$  есть масса тела, которую мы будем обозначать через  $M$ . Во втором члене пишем

$$\sum m \mathbf{V} \cdot [\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}] = \sum m \mathbf{r} \cdot [\mathbf{V} \times \boldsymbol{\Omega}] = [\mathbf{V} \times \boldsymbol{\Omega}] \cdot \sum m \mathbf{r}. \quad (11.6)$$

Отсюда видно, что если начало  $O$  движущейся системы координат выбрано, как условлено, в центре инерции тела, то этот член обращается в нуль, так как тогда  $\sum m \mathbf{r} = 0$ . Наконец, в третьем члене раскрываем квадрат векторного произведения:

$$\begin{aligned} [\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}]^2 &= [\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}] \cdot [\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}] = \boldsymbol{\Omega} \cdot [\mathbf{r} \times [\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}]] = \\ &= \boldsymbol{\Omega} \cdot (\boldsymbol{\Omega} r^2 - \mathbf{r}(\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{r})) = \Omega^2 r^2 - (\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{r})^2. \end{aligned} \quad (11.7)$$

В результате находим

$$T = \frac{MV^2}{2} + \frac{1}{2} \sum m \{ \Omega^2 r^2 - (\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{r})^2 \}. \quad (11.8)$$

Таким образом, кинетическую энергию твердого тела можно представить в виде суммы двух частей. Первый член в (11.8) — это кинетическая энергия поступательного движения. Она имеет такой вид, как если бы вся масса тела  $M$  была сосредоточена в его центре инерции. Второй член — это кинетическая энергия вращательного движения с угловой скоростью  $\boldsymbol{\Omega}$  вокруг оси, проходящей через центр инерции. Необходимо подчеркнуть, что возможность такого разделения кинетической энергии на две независимые части обусловлена выбором начала подвижной системы координат в центре инерции тела.

Как мы уже говорили, угловая скорость вращения  $\boldsymbol{\Omega}$  одинакова для всех точек тела, и поэтому ее можно было бы вынести за знак суммы и во втором члене (11.8), описывающем кинетическую энергию вращательного движения:

$$T_p = \frac{1}{2} \sum m \{ \Omega^2 r^2 - (\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{r})^2 \}. \quad (11.9)$$

Однако если это просто сделать для первого слагаемого, то для второго это не так очевидно. Проблему решает переход к **тензорным обозначениям**. Запишем

$$\begin{aligned} \Omega^2 &= \boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{\Omega} = \Omega_i \Omega_i \equiv \Omega_i^2, \\ r^2 &= \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} = x_l x_l \equiv x_l^2, \\ (\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{r})^2 &= (\Omega_i x_i)(\Omega_k x_k) = \Omega_i \Omega_k x_i x_k, \end{aligned} \quad (11.10)$$

поэтому

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum m \{ \Omega_i^2 x_i^2 - \Omega_i x_i \Omega_k x_k \} = \frac{1}{2} \sum m \{ \Omega_i \Omega_k \delta_{ik} x_i^2 - \Omega_i \Omega_k x_i x_k \} = \\ &= \frac{1}{2} \Omega_i \Omega_k \sum m (x_i^2 \delta_{ik} - x_i x_k). \end{aligned} \quad (11.11)$$

Здесь было использовано тождество  $\Omega_i = \delta_{ik} \Omega_k$ , где  $\delta_{ik}$  — символ Кронекера. Вводя обозначение

$$I_{ik} = \sum m (x_i^2 \delta_{ik} - x_i x_k), \quad (11.12)$$

получим окончательное выражение для кинетической энергии твердого тела

$$T = \frac{MV^2}{2} + \frac{1}{2} I_{ik} \Omega_i \Omega_k. \quad (11.13)$$

Введенная нами совокупность девяти величин  $I_{ik} = \sum m (x_i^2 \delta_{ik} - x_i x_k)$  зависит от геометрии твердого тела, а точнее от распределения масс, и называется **тензором моментов инерции**, или просто **тензором инерции** тела. Здесь мы должны немного отвлечься и поговорить о том, что такое **тензор** вообще. Как мы покажем ниже, понятие тензора есть обобщение понятия вектора. Всего, как мы видим, в общем случае у тензора  $I_{ik}$  имеется девять компонент. Однако поскольку этот тензор **симметричен**, то есть

$$I_{ik} = I_{ki}, \quad (11.14)$$

то независимых компонент всего шесть. Записывают компоненты тензора обычно в виде следующей таблицы:

$$I_{ik} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix}. \quad (11.15)$$

Самое важное, что хотелось бы здесь отметить, — это то, что, по аналогии с вектором, компоненты которого зависят от выбора системы координат, компоненты тензора  $I_{ik}$  тоже зависят от выбора системы координат.

Как известно, при повороте системы координат компоненты радиус-вектора (и вообще любого другого вектора) преобразуются по закону

$$x_i = \alpha_{ik} x'_k, \quad (11.16)$$

где  $\alpha_{ik} = \cos(\widehat{ik'})$  — матрица направляющих косинусов, или, как мы ее называем, матрица поворота. Пользуясь этим соотношением, найдем связь между компонентами тензора в старой и в новой системах координат. Подставим для этого (11.16) в выражение для тензора инерции (11.12):

$$I_{ik} = \sum m \underbrace{(\alpha_{im} x'_m)}_{x_i} \underbrace{(\alpha_{ln} x'_n)}_{x_i} \delta_{ik} - \underbrace{(\alpha_{ip} x'_p)}_{x_i} \underbrace{(\alpha_{ks} x'_s)}_{x_k}. \quad (11.17)$$

Замечаем, что в первом слагаемом  $\alpha_{im} \alpha_{ln} = \delta_{mn}$  (ортогональность столбцов матрицы поворота), а символ Кронекера (пользуясь ортогональностью строк) можно переписать в виде

$$\delta_{ik} = \alpha_{ip} \alpha_{kp} = \alpha_{ip} \alpha_{ks} \delta_{ps} \quad (\text{ортогональность строк}). \quad (11.18)$$

Используя все это вместе, получим

$$\begin{aligned} I_{ik} &= \sum m (\delta_{mn} x'_m x'_n \alpha_{ip} \alpha_{ks} \delta_{ps} - \alpha_{ip} \alpha_{ks} x'_p x'_s) = \\ &= \alpha_{ip} \alpha_{ks} \sum m [(x'_n)^2 \delta_{ps} - x'_p x'_s] = \alpha_{ip} \alpha_{ks} I'_{ps}, \end{aligned} \quad (11.19)$$

где

$$I'_{ik} = \sum m [(x'_i)^2 \delta_{ik} - x'_i x'_k] \quad (11.20)$$

представляют собой компоненты тензора в новой (повернутой) системе координат.

Таким образом, мы пришли к выводу, что при повороте системы координат девять величин  $I_{ik}$  преобразуются по закону

$$I_{ik} = \alpha_{ip} \alpha_{ks} I'_{ps}. \quad (11.21)$$

Этот закон преобразования совпадает с законом преобразования произведения двух компонент вектора

$$\begin{aligned}x_i &= \alpha_{ip}x'_p, \\x_k &= \alpha_{ks}x'_s, \\x_ix_k &= \alpha_{ip}\alpha_{ks}x'_p x'_s.\end{aligned}\tag{11.22}$$

В математике

величина, которая при повороте системы координат преобразуется как произведение двух компонент вектора, называется **тензором второго ранга**.

Таким образом, тензор инерции является симметричным тензором второго ранга. По аналогии можно ввести тензоры более высоких рангов. Вектор также можно называть **тензором первого ранга**.

Выпишем для наглядности компоненты тензора инерции в явном виде:

$$I_{ik} = \begin{pmatrix} \sum m(y^2 + z^2) - \sum mxy & -\sum mxz \\ -\sum myx & \sum m(x^2 + z^2) - \sum myz \\ -\sum mzx & -\sum mzy & \sum m(x^2 + y^2) \end{pmatrix}.\tag{11.23}$$

Компоненты  $I_{xx}$ ,  $I_{yy}$  и  $I_{zz}$  иногда называют моментами инерции тела относительно соответствующих осей. Заметим, что тензор инерции аддитивен — моменты инерции тела равны суммам моментов инерции его частей.

Если твердое тело можно рассматривать как сплошное, то в определении тензора  $I_{ik}$  (см. (11.12)) сумма заменяется интегралом по объему тела:

$$I_{ik} = \int \rho(x_l^2 \delta_{ik} - x_i x_k) dV.\tag{11.24}$$

Как мы уже сказали, конкретный вид тензора моментов инерции зависит от выбора системы координат. В математике доказывается теорема, которая гласит, что

**всякий симметричный тензор второго ранга может быть приведен к диагональному виду путем соответствующего выбора направления осей  $x_1$ ,  $x_2$  и  $x_3$ .**

Эти направления называют **главными осями инерции**, а соответствующие значения компонент тензора — **главными моментами инерции**. Обозначим их как  $I_1$ ,  $I_2$  и  $I_3$ . При таком выборе осей  $x_1$ ,  $x_2$  и  $x_3$  тензор  $I_{ik}$  имеет вид

$$I_{ik} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}\tag{11.25}$$

и кинетическая энергия вращательного движения выражается особенно просто:

$$T = \frac{1}{2}(I_1\Omega_1^2 + I_2\Omega_2^2 + I_3\Omega_3^2).\tag{11.26}$$

Отметим, что каждый из трех главных моментов инерции не может быть больше суммы двух других. Так,

$$\begin{aligned}I_1 + I_2 &= \sum m(x_2^2 + x_3^2 + x_1^2 + x_3^2) = \\ &= \sum m(x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2) \geq \sum m(x_1^2 + x_2^2) = I_3.\end{aligned}\tag{11.27}$$

Тело, у которого все три главных момента инерции различны, называют **асимметрическим волчком**. Если два главных момента инерции равны друг другу, например  $I_1 = I_2 \neq I_3$ , то твердое тело называют **симметрическим волчком**. В этом случае выбор направления главных осей в плоскости  $x_1x_2$  произволен (пример симметрического волчка — любое тело вращения, например юла). Если же все три главных момента инерции совпадают, то тело называется **шаровым волчком**. В этом случае произволен выбор всех трех главных осей инерции — в качестве них можно взять любые три взаимно перпендикулярные оси (проходящие через центр инерции тела)<sup>1</sup>.

<sup>1</sup>Шаровой волчок не обязательно имеет форму шара: например, однородное тело в форме куба — тоже шаровой волчок.

Нахождение главных осей инерции очень упрощается, если твердое тело обладает той или иной **симметрией**. Ясно, что положение центра инерции и направление главных осей инерции должны обладать той же самой симметрией.

Так, если тело обладает **плоскостью симметрии**, то центр инерции должен лежать в этой плоскости. В ней же лежат две главные оси инерции, а третья — перпендикулярна к ней. Очевидным примером такого сорта является система частиц, расположенных в одной плоскости. В этом случае имеется простое соотношение между тремя главными моментами инерции. Так, если плоскость системы выбрана в качестве плоскости  $x_1x_2$ , то, поскольку для всех частиц  $x_3 = 0$ , имеем

$$I_1 = \sum m x_2^2, \quad I_2 = \sum m x_1^2, \quad I_3 = \sum m(x_1^2 + x_2^2), \quad (11.28)$$

так что в результате

$$I_3 = I_1 + I_2. \quad (11.29)$$

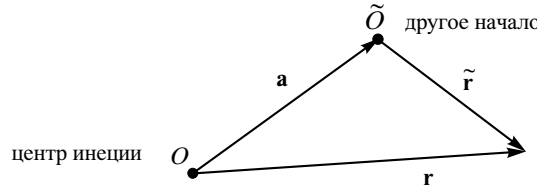
Говорят, что тело обладает **осью симметрии**  $n$ -го порядка, если оно совмещается само с собой при повороте на угол  $2\pi/n$  вокруг этой оси. Ясно, что если тело обладает осью симметрии какого-либо порядка ( $n \neq 1$ ), то центр инерции лежит на этой оси. С ней же совпадает одна из главных осей инерции, а две другие — перпендикулярны к ней. При этом если порядок оси симметрии выше второго ( $n = 3, 4, \dots$ ), то тело является симметрическим волчком. Действительно, каждую главную ось (перпендикулярную к оси симметрии) можно тогда повернуть на угол, отличный от  $180^\circ$ . Другими словами, выбор этих осей становится неоднозначным, а это возможно лишь в случае симметрического волчка. Примером симметрического волчка (помимо тела вращения) является прямая призма, в основании которой лежит правильный многоугольник.

Особым случаем, представляющим интерес, является система частиц, расположенных вдоль одной прямой линии. Если выбрать эту прямую в качестве оси  $x_3$ , то для всех частиц  $x_1 = x_2 = 0$ , и поэтому два главных момента инерции совпадают, а третий равен нулю:

$$I_1 = I_2 = \sum m x_3^2, \quad I_3 = 0. \quad (11.30)$$

Такую систему называют **ротатором**. От общего случая произвольного тела его отличает то, что он имеет всего **две** (а не три) вращательные степени свободы, соответствующие вращениям вокруг осей  $x_1$  и  $x_2$ . Говорить же о вращении прямой вокруг самой себя, очевидно, не имеет смысла.

Иногда удобно вычислять тензор инерции относительно точки, не совпадающей с центром инерции тела. Тогда (см. рис. 11.2)



**Рис. 11.2.** Вычисление тензора инерции относительно другого начала.

$$\tilde{I}_{ik} = \sum m (\tilde{x}_i^2 \delta_{ik} - \tilde{x}_i \tilde{x}_k). \quad (11.31)$$

Поскольку  $\mathbf{r} = \tilde{\mathbf{r}} + \mathbf{a}$ , или  $x_i = \tilde{x}_i + a_i$ , то, подставляя  $\tilde{x}_i = x_i - a_i$ , получаем

$$\begin{aligned} \tilde{I}_{ik} &= \sum m \{ (x_i - a_i)^2 \delta_{ik} - (x_i - a_i)(x_k - a_k) \} = \\ &= \sum m \{ (x_i^2 - 2x_i a_i + a_i^2) \delta_{ik} - x_i x_k + a_i x_k + a_k x_i - a_i a_k \} = \\ &= \sum m (x_i^2 \delta_{ik} - x_i x_k) - 2\delta_{ik} a_i \sum m x_i + a_i \sum m x_k + a_k \sum m x_i + \\ &+ M(a^2 \delta_{ik} - a_i a_k). \end{aligned} \quad (11.32)$$

Так как точка  $O$  — центр инерции тела, то  $\sum m x_i = 0$ , и в результате получаем

$$\tilde{I}_{ik} = I_{ik} + M(a^2 \delta_{ik} - a_i a_k). \quad (11.33)$$

С помощью этой формулы, зная  $\tilde{I}_{ik}$ , легко вычислить искомый тензор  $I_{ik}$  и наоборот. Частным случаем этой формулы является связь между моментами инерции тела относительно двух различных параллельных осей. Пусть одна из этих осей (ось  $C$ ) проходит через центр инерции тела, а вторая

(ось  $A$ ) — отстоит от нее на расстоянии  $a$ . Тогда, принимая направления этих осей за оси  $z$  и  $\tilde{z}$  соответственно, получим

$$\tilde{I}_{zz} = I_{zz} + \mathcal{M}a^2 \quad (11.34)$$

(поскольку  $a_z = 0$ ). Это есть теорема Гюйгенса–Штейнера.

## Момент импульса твердого тела. Уравнение движения твердого тела. Уравнения Эйлера. Устойчивость вращения

Как мы знаем, величина момента импульса системы материальных точек, вообще говоря, зависит от выбора начала координат, относительно которого он определен. И только в том случае, если в выбранной системе отсчета скорость поступательного движения твердого тела  $\mathbf{V} = 0$ , его момент импульса не зависит от выбора точки отсчета. Поэтому в этом случае естественно в качестве такой точки выбрать центр инерции тела — начало подвижной системы координат. Тогда в выражении для момента импульса

$$\mathbf{M} = \sum m[\mathbf{r} \times \mathbf{v}] \quad (12.1)$$

скорость  $\mathbf{v}$  надо заменить на  $[\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}]$ :

$$\mathbf{M} = \sum m[\mathbf{r} \times [\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}]] = \sum m(\boldsymbol{\Omega}r^2 - \mathbf{r}(\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{r})). \quad (12.2)$$

Вводя тензорные обозначения, получим

$$\begin{aligned} M_i &= \sum m(\Omega_i x_l^2 - x_i(\Omega_k x_k)) = \sum m(\delta_{ik}\Omega_k x_l^2 - x_i x_k \Omega_k) = \\ &= \Omega_k \sum m(x_l^2 \delta_{ik} - x_i x_k) = \Omega_k I_{ik}. \end{aligned} \quad (12.3)$$

Таким образом, связь между двумя векторами  $\mathbf{M}$  и  $\boldsymbol{\Omega}$  можно записать в виде

$$M_i = I_{ik}\Omega_k. \quad (12.4)$$

Если оси  $x_1, x_2, x_3$  направлены вдоль главных осей инерции тела, то недиагональные компоненты тензора инерции равны нулю и эта формула дает

$$M_1 = I_1\Omega_1, \quad M_2 = I_2\Omega_2, \quad M_3 = I_3\Omega_3. \quad (12.5)$$

В частности, для шарового волчка, у которого все три главных момента инерции совпадают,  $I_1 = I_2 = I_3 = I$ , имеем

$$\mathbf{M} = I\boldsymbol{\Omega}. \quad (12.6)$$

Таким образом, для шарового волчка момент количества движения пропорционален угловой скорости вращения и имеет одинаковое с ней направление.

В общем же случае произвольного тела вектор  $\mathbf{M}$ , вообще говоря, **не совпадает** по направлению с вектором  $\boldsymbol{\Omega}$ . Это обстоятельство является причиной сложного поведения вращающихся тел. Направления  $\mathbf{M}$  и  $\boldsymbol{\Omega}$  совпадают лишь при вращении твердого тела вокруг одной из его главных осей<sup>1</sup>.

Как и у всякой замкнутой системы, момент импульса свободно вращающегося тела постоянен. Для шарового волчка условие  $\mathbf{M} = \text{const}$  дает  $\boldsymbol{\Omega} = \text{const}$ . Это значит, что свободное вращения шарового волчка есть просто равномерное вращение вокруг постоянной оси.

Столь же простым является и случай ротатора. Здесь, так как  $I_1 = I_2 = I$ , а  $I_3 = 0$  (ось 3 направлена вдоль оси ротатора),  $\mathbf{M} = I\boldsymbol{\Omega}$ , причем вектор  $\boldsymbol{\Omega}$  перпендикулярен оси ротатора. Поэтому свободное вращение ротатора есть равномерное вращение в одной плоскости вокруг направления, перпендикулярного к этой плоскости. Закона сохранения момента достаточно и для определения более сложного свободного вращения симметрического волчка.

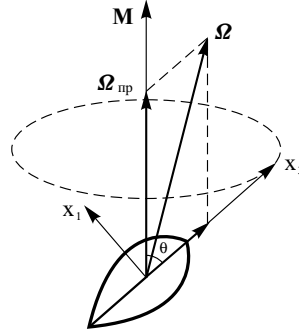
Для этого воспользуемся произвольностью выбора направлений главных осей инерции  $x_1$  и  $x_2$ , перпендикулярных к оси симметрии волчка  $x_3$ . А именно, выберем ось  $x_2$  перпендикулярной к плоскости, которая определяется постоянным вектором  $\mathbf{M}$  и мгновенным положением оси  $x_3$  (рис. 12.1)

$$x_2 \perp \text{плоскости } \{\mathbf{M}, x_3\}.$$

Тогда  $M_2 = 0$ , а следовательно, и  $\Omega_2 = 0$ . Таким образом, направления  $\mathbf{M}$ ,  $\boldsymbol{\Omega}$  и  $x_3$  в каждый момент времени лежат в одной плоскости. Отсюда, в свою очередь, следует, что скорости  $\mathbf{v} = [\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}]$  всех

<sup>1</sup>Это может служить определением главных осей и способом их нахождения на практике.

точек на оси волчка  $x_3$  в каждый момент времени перпендикулярны к этой плоскости. Другими словами, ось волчка равномерно (см. ниже) вращается вокруг направления  $\mathbf{M}$ , описывая круговой конус с углом раствора  $\theta = \text{const}$ . Это есть так называемая **регулярная прецессия** волчка. Одновременно с прецессией сам волчок равномерно вращается вокруг собственной оси  $x_3$ .



**Рис. 12.1.** Вращение симметрического волчка.

Угловые скорости обоих вращений легко выразить через заданную величину момента  $M$  и угол наклона  $\theta$  оси волчка  $x_3$  к направлению  $\mathbf{M}$ . Угловая скорость вращения волчка вокруг своей оси есть проекция  $\Omega_3$  вектора  $\Omega$  на эту ось:

$$\Omega_3 = \frac{M_3}{I_3} = \frac{M}{I_3} \cos \theta. \quad (12.7)$$

Для определения же скорости прецессии  $\Omega$  надо разложить вектор  $\Omega$  по правилу параллелограмма на составляющие вдоль оси  $x_3$  и вдоль направления  $\mathbf{M}$ . Из них первая составляющая вдоль  $x_3$  не приводит ни к какому перемещению самой оси волчка, а поэтому вторая составляющая дает искомую угловую скорость прецессии. Из рисунка видно, что  $\Omega \sin \theta = \Omega_1$ , а поскольку  $\Omega_1 = M_1/I_1 = M \sin \theta/I_1$ , то мы получаем

$$\Omega = \frac{M}{I_1}. \quad (12.8)$$

Это и значит, что  $\Omega = \text{const}$ .

Выведем теперь формулу, связывающую момент импульса  $\mathbf{M}$  и угловую скорость вращения  $\Omega$  с кинетической энергией вращения  $T$ . Для этого заметим, что с одной стороны,

$$T = \frac{1}{2} I_{ik} \Omega_i \Omega_k, \quad (12.9)$$

а с другой,

$$M_i = I_{ik} \Omega_k. \quad (12.10)$$

Поэтому имеем

$$T = \frac{1}{2} \underbrace{I_{ik} \Omega_k}_{M_i} \Omega_i = \frac{1}{2} M_i \Omega_i = \frac{1}{2} \mathbf{M} \cdot \Omega, \quad (12.11)$$

то есть кинетическая энергия вращения равна половине скалярного произведения момента импульса на угловую скорость вращения (сравни с выражением для кинетической энергии поступательного движения  $mv^2/2 = (\mathbf{p} \cdot \mathbf{v})/2$ ). Отсюда для свободного вращения, когда  $T = (\mathbf{M} \cdot \Omega)/2 = \text{const}$  и  $\mathbf{M} = \text{const}$ , следует, что проекция вектора  $\Omega$  на направление  $\mathbf{M}$  в процессе вращения не изменяется.

## Уравнения движения твердого тела

Поскольку в общем случае твердое тело обладает **шестью** степенями свободы, то общая система уравнений движения должна содержать шесть независимых уравнений. Их можно представить в виде двух векторных уравнений для скорости изменения импульса и момента импульса тела.

Первое из этих уравнений получается в результате простого суммирования уравнений движения  $\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{f}$  для каждой из составляющих тело частиц, где  $\mathbf{p}$  — импульс частицы, а  $\mathbf{f}$  — действующая на нее сила. Вводя полный импульс тела

$$\mathbf{P} = \sum \mathbf{p} = M\mathbf{V} \quad (12.12)$$

и полную действующую на него силу  $\sum \mathbf{f} = \mathbf{F}$ , получим

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{F}. \quad (12.13)$$

Выше мы определили  $\mathbf{F}$  как сумму всех сил  $\mathbf{f}$ , действующих на каждую из частиц, в том числе и со стороны других частиц тела. Однако ясно, что фактически в  $\mathbf{F}$  входят только силы, действующие со стороны внешних источников, поскольку **все силы взаимодействия между частицами самого тела взаимно сокращаются**. Действительно, при отсутствии внешних сил импульс тела, как и у всякой замкнутой системы, должен сохраняться, то есть должно быть  $\mathbf{F} = 0$ .

Если  $U$  — потенциальная энергия твердого тела во внешнем поле, то сила  $\mathbf{F}$  может быть определена путем ее дифференцирования по координатам центра инерции тела:

$$\mathbf{F} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{R}}. \quad (12.14)$$

Для вывода второго уравнения движения, определяющего скорость изменения момента импульса  $\mathbf{M}$ , поступим следующим образом. Выберем нашу “неподвижную” (инерциальную) систему отсчета таким образом, чтобы в каждый данный момент времени центр инерции тела покоился относительно нее. Полученное таким образом уравнение будет справедливо и в любой другой инерциальной системе отсчета в силу галилеевского принципа относительности.

Имеем

$$\dot{\mathbf{M}} = \frac{d}{dt} \sum [\mathbf{r} \times \mathbf{p}] = \sum [\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{p}}] + \sum [\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{p}]. \quad (12.15)$$

В силу сделанного нами выбора системы отсчета, в которой  $\mathbf{V} = 0$ , значение  $\dot{\mathbf{r}}$  в данный момент времени совпадает со скоростью  $\mathbf{v} = \dot{\phi}$ . Но поскольку векторы  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$  имеют одинаковое направление, то  $[\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{p}] = 0$ . Заменяв  $\dot{\mathbf{p}}$  на силу  $\mathbf{f}$ , получим окончательно

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = \mathbf{K}, \quad \text{где } \mathbf{K} = \sum [\mathbf{r} \times \mathbf{f}]. \quad (12.16)$$

Вектор  $[\mathbf{r} \times \mathbf{f}]$  называется **моментом силы  $\mathbf{f}$** , так что  $\mathbf{K}$  есть сумма моментов всех сил, действующих на тело. Как и в полной силе  $\mathbf{F}$ , в сумме  $\sum [\mathbf{r} \times \mathbf{f}]$  фактически должны учитываться лишь внешние силы. В соответствии с законом сохранения момента импульса, сумма моментов всех сил, действующих внутри замкнутой системы, должна обращаться в нуль.

Вообще говоря, момент силы, как и момент импульса, зависит от выбора начала координат, относительно которого он определен. Выше все моменты были определены относительно центра инерции тела. Однако представляет интерес выяснить, как момент силы изменяется при переносе начала отсчета. Так, при переносе начала координат на расстояние  $\mathbf{a}$  новые радиус-векторы  $\mathbf{r}'$  точек тела связаны со старыми  $\mathbf{r}$  таким образом:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{a}. \quad (12.17)$$

Поэтому

$$\mathbf{K} = \sum [\mathbf{r} \times \mathbf{f}] = \sum [\mathbf{r}' \times \mathbf{f}] + \sum [\mathbf{a} \times \mathbf{f}], \quad (12.18)$$

или, вынося  $\mathbf{a}$  за знак суммы, получаем

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}' + [\mathbf{a} \times \mathbf{F}]. \quad (12.19)$$

Отсюда, в частности, видно, что величина момента сил не зависит от выбора начала координат, если полная сила  $\mathbf{F}$  равна нулю (в таком случае говорят, что к телу приложена **пара сил**).

## Уравнения Эйлера

Выведенные нами уравнения движения

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{F} \quad \text{и} \quad \frac{d\mathbf{M}}{dt} = \mathbf{K} \quad (12.20)$$

относятся к неподвижной системе координат, и производные в этих уравнениях характеризуют изменение этих векторов по отношению к этой же системе. Для первого уравнения, поскольку  $\mathbf{P} = \mathcal{M}\mathbf{V}$ , где масса тела  $\mathcal{M}$  не меняется со временем, это не приводит к возникновению дополнительных трудностей по сравнению с уравнением движения одной материальной точки. Однако во втором уравнении,



описывающем вращение твердого тела, момент импульса  $\mathbf{M}$  связан с угловой скоростью  $\mathbf{\Omega}$  посредством тензора инерции  $I_{ik}$ . Компоненты последнего, будучи неизменными во времени в подвижной (жестко связанной с телом) системе координат, вообще говоря меняются со временем в неподвижной (лабораторной) системе. Это изменение обусловлено поворотом подвижной системы координат относительно неподвижной в процессе вращения. Величина поворота зависит от угловой скорости вращения, которая, в свою очередь, определяется моментами инерции  $I_{ik}$ . В результате проблема интегрирования уравнений движения становится несравненно более сложной, чем в случае обычного поступательного движения. В этом мы с вами уже убедились на примере свободного вращения симметрического волчка.

С другой стороны, в подвижной системе координат с осями, направленными по главным осям инерции твердого тела, величины  $I_{ik}$  не зависят от времени, и, более того, имеется простая связь между компонентами вращательного момента  $\mathbf{M}$  и компонентами угловой скорости  $\mathbf{\Omega}$ . Поэтому представляет интерес выяснить, как будут выглядеть уравнения, описывающие вращение в подвижной системе координат. Для этого нам нужно преобразовать уравнение (12.16) от лабораторной системы к подвижным координатам  $x_1, x_2, x_3$ .

Пусть  $d\mathbf{A}/dt$  — скорость изменения какого-либо вектора  $\mathbf{A}$  по отношению к неподвижной системе координат. Если по отношению к вращающейся системе вектор  $\mathbf{A}$  не изменяется, то его изменение относительно неподвижной системы обусловлено только его вращением и тогда

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = [\mathbf{\Omega} \times \mathbf{A}] \quad (12.21)$$

(сравни с выражением  $d\mathbf{r}/dt = [\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}]$ ). В общем же случае к правой части этого равенства надо добавить скорость изменения вектора  $\mathbf{A}$  по отношению к подвижной системе координат. Обозначим эту скорость через  $d'\mathbf{A}/dt$ . Тогда получим

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{d'\mathbf{A}}{dt} + [\mathbf{\Omega} \times \mathbf{A}]. \quad (12.22)$$

Эта формула является прямым следствием правила дифференцирования произведения двух функций. Действительно, вектор  $\mathbf{A}$  можно разложить по ортам подвижной системы координат:

$$\mathbf{A} = A_1\mathbf{n}_1 + A_2\mathbf{n}_2 + A_3\mathbf{n}_3. \quad (12.23)$$

Тогда

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \left( \frac{dA_1}{dt}\mathbf{n}_1 + \frac{dA_2}{dt}\mathbf{n}_2 + \frac{dA_3}{dt}\mathbf{n}_3 \right) + \left( A_1 \frac{d\mathbf{n}_1}{dt} + A_2 \frac{d\mathbf{n}_2}{dt} + A_3 \frac{d\mathbf{n}_3}{dt} \right). \quad (12.24)$$

Учитывая, что

$$\frac{d\mathbf{n}_1}{dt} = [\mathbf{\Omega} \times \mathbf{n}_1], \quad \frac{d\mathbf{n}_2}{dt} = [\mathbf{\Omega} \times \mathbf{n}_2], \quad \frac{d\mathbf{n}_3}{dt} = [\mathbf{\Omega} \times \mathbf{n}_3], \quad (12.25)$$

мы приходим к формуле (12.22), где первое слагаемое соответствует первому слагаемому в формуле (12.24).

Применив это равенство к скорости изменения момента импульса, получим

$$\frac{d'\mathbf{M}}{dt} + [\mathbf{\Omega} \times \mathbf{M}] = \mathbf{K}. \quad (12.26)$$

Положив теперь, что оси подвижной системы координат выбраны вдоль главных осей инерции тела и что  $M_1 = I_1\Omega_1$ ,  $M_2 = I_2\Omega_2$ ,  $M_3 = I_3\Omega_3$ , получаем для проекции на ось  $x_1$

$$\frac{dM_1}{dt} + [\mathbf{\Omega} \times \mathbf{M}]_1 = K_1, \quad (12.27)$$

или

$$I_1 \frac{d\Omega_1}{dt} + \Omega_2 M_3 - \Omega_3 M_2 = K_1, \quad (12.28)$$

или

$$I_1 \frac{d\Omega_1}{dt} + (I_3 - I_2)\Omega_2\Omega_3 = K_1. \quad (12.29)$$

Применяя такую же процедуру к проекциям на две другие оси, получим систему трех уравнений

$$\begin{aligned} I_1 \frac{d\Omega_1}{dt} + (I_3 - I_2)\Omega_2\Omega_3 &= K_1, \\ I_2 \frac{d\Omega_2}{dt} + (I_1 - I_3)\Omega_1\Omega_3 &= K_2, \\ I_3 \frac{d\Omega_3}{dt} + (I_2 - I_1)\Omega_1\Omega_2 &= K_3, \end{aligned} \quad (12.30)$$

которые называются **уравнениями Эйлера**. В случае свободного движения  $\mathbf{K} = 0$  и мы имеем

$$\begin{aligned}\frac{d\Omega_1}{dt} + \frac{I_3 - I_2}{I_1}\Omega_2\Omega_3 &= 0, \\ \frac{d\Omega_2}{dt} + \frac{I_1 - I_3}{I_2}\Omega_1\Omega_3 &= 0, \\ \frac{d\Omega_3}{dt} + \frac{I_2 - I_1}{I_3}\Omega_1\Omega_2 &= 0.\end{aligned}\tag{12.31}$$

В качестве примера давайте применим эти уравнения к уже рассматривавшемуся нами свободному вращению симметрического волчка. Полагая  $I_2 = I_1$ , из третьего уравнения получаем, что

$$\dot{\Omega}_3 = 0, \quad \text{или} \quad \Omega_3 = \text{const.}\tag{12.32}$$

После этого первые два уравнения принимают следующий вид:

$$\begin{aligned}\frac{d\Omega_1}{dt} + \frac{I_3 - I_1}{I_1}\Omega_2\Omega_3 &= 0, \\ \frac{d\Omega_2}{dt} + \frac{I_1 - I_3}{I_1}\Omega_1\Omega_3 &= 0.\end{aligned}\tag{12.33}$$

Вводя обозначение

$$\omega = \Omega_3 \frac{I_3 - I_1}{I_1},\tag{12.34}$$

получаем

$$\begin{aligned}\dot{\Omega}_1 &= -\omega\Omega_2, \\ \dot{\Omega}_2 &= \omega\Omega_1.\end{aligned}\tag{12.35}$$

Умножив второе уравнение на  $i$  и сложив его с первым уравнением, получаем

$$\frac{d}{dt}(\Omega_1 + i\Omega_2) = i\omega(\Omega_1 + i\Omega_2).\tag{12.36}$$

Решение этого уравнения с разделяющимися переменными, очевидно, такое:

$$\Omega_1 + i\Omega_2 = Ae^{i\omega t},\tag{12.37}$$

где  $A$  — постоянная, которую можно считать вещественной (это сводится к надлежащему выбору начала отсчета времени). После этого, используя известную формулу

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi,\tag{12.38}$$

получаем, что

$$\begin{aligned}\Omega_1 &= A \cos \omega t, \\ \Omega_2 &= A \sin \omega t.\end{aligned}\tag{12.39}$$

Из последнего уравнения следует, что проекция угловой скорости на плоскость, перпендикулярную оси волчка, вращается в этой плоскости с угловой скоростью  $\omega$ , оставаясь постоянной по величине:  $\sqrt{\Omega_1^2 + \Omega_2^2} = A$ . Поскольку проекция  $\Omega_3$  на ось волчка тоже постоянна, то мы приходим к выводу, что и весь вектор  $\boldsymbol{\Omega}$  равномерно вращается с угловой скоростью  $\omega$  вокруг оси волчка  $x_3$ , оставаясь неизменным по величине. Поскольку имеется связь

$$M_1 = I_1\Omega_1, \quad M_2 = I_1\Omega_2, \quad M_3 = I_3\Omega_3\tag{12.40}$$

между компонентами векторов  $\boldsymbol{\Omega}$  и  $\mathbf{M}$ , такое же движение (по отношению к оси волчка) совершает, очевидно, и вектор момента  $\mathbf{M}$ . Полученная картина, разумеется, совершенно эквивалентна той, которая была получена при рассмотрении движения волчка в неподвижной системе координат.

## Устойчивость вращения

Пользуясь уравнениями Эйлера, можно исследовать вопрос об устойчивости вращения твердого тела вокруг одной из главных осей. В частности, можно показать, что вращение вокруг оси с промежуточным значением момента инерции неустойчиво. Пусть, например,

$$I_3 > I_2 > I_1 \quad (12.41)$$

и тело вращается вокруг оси  $x_2$ . Тогда  $\Omega_1 = \Omega_3 = 0$  и  $\Omega_2 = \Omega_{20} = \text{const} \neq 0$ . Подставляя это в уравнения Эйлера, получим, что

$$\frac{d\Omega_1}{dt} = \frac{d\Omega_2}{dt} = \frac{d\Omega_3}{dt} = 0. \quad (12.42)$$

Таким образом, вращение с постоянной угловой скоростью вокруг оси  $x_2$  удовлетворяет уравнениям Эйлера. Однако, как мы покажем, оно является неустойчивым относительно малого возмущения.

Пусть угловая скорость  $\Omega$  немного отклонилась от своего направления  $x_2$ , так что появились малые составляющие вдоль осей  $x_1$  и  $x_3$ :

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \omega_1, \\ \Omega_3 &= \omega_3, \end{aligned} \quad (12.43)$$

где  $\omega_1, \omega_2 \ll \Omega_{20}$  малы (изменением проекции  $\Omega_2$  можно в первом приближении пренебречь). Тогда

$$\begin{aligned} \frac{d\omega_1}{dt} + \frac{I_3 - I_2}{I_1} \Omega_{20} \omega_3 &= 0, \\ \frac{d\omega_3}{dt} + \frac{I_2 - I_1}{I_3} \Omega_{20} \omega_1 &= 0. \end{aligned} \quad (12.44)$$

Будем искать решение этой системы уравнений в виде экспоненты

$$\omega_1 \sim \omega_3 \sim e^{pt}. \quad (12.45)$$

Подставляя это в (12.44), получаем для величины  $p$  систему линейных однородных уравнений

$$\begin{aligned} p\omega_1 + \frac{I_3 - I_2}{I_1} \Omega_{20} \omega_3 &= 0, \\ \frac{I_2 - I_1}{I_3} \Omega_{20} \omega_1 + p\omega_3 &= 0. \end{aligned} \quad (12.46)$$

Условие существования нетривиального (то есть отличного от нуля) решения этой системы уравнений заключается в равенстве нулю ее определителя:

$$\begin{vmatrix} p & \frac{I_3 - I_2}{I_1} \Omega_{20} \\ \frac{I_2 - I_1}{I_3} \Omega_{20} & p \end{vmatrix} = 0. \quad (12.47)$$

Отсюда получаем так называемое **характеристическое уравнение** для  $p$

$$p^2 - \frac{I_3 - I_2}{I_1} \cdot \frac{I_2 - I_1}{I_3} \Omega_{20}^2 = 0, \quad (12.48)$$

корни которого при  $I_3 > I_2 > I_1$  вещественны,

$$p_{1,2} = \pm \Omega_{20} \sqrt{\frac{(I_3 - I_2)(I_2 - I_1)}{I_1 I_3}}, \quad (12.49)$$

причем  $p_1 > 0$ , а  $p_2 < 0$ . Наличие положительного корня означает, что решение  $\Omega_1 = \Omega_3 = 0$ ,  $\Omega_2 = \Omega_{20} = \text{const}$  **неустойчиво**, так как случайно возникшее возмущение усиливается и растет по экспоненте:

$$\omega_1 \sim \omega_3 \sim \exp \left\{ \Omega_{20} \sqrt{\frac{(I_3 - I_2)(I_2 - I_1)}{I_1 I_3}} t \right\}. \quad (12.50)$$

## Литература

- [1] Сивухин Д. В. Общий курс физики. Механика. М., Наука, 1979 — 520 с.
- [2] Киттель Ч., Найт У., Рудерман М. Берклевский курс физики, том 1, Механика. М., Наука, 1975 — 480 с.
- [3] Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике (1–2 том). М., Мир, 1976 — 440 с.
- [4] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика в 10 томах, том 1, Механика. М., Наука, 1973 — 208 с.
- [5] Иродов И. Е. Задачи по общей физике. М., Наука, 1988 — 416 с.

# Оглавление

## **Лекция 9.**

Изотропия пространства.

Закон сохранения момента

импульса.

Движение в центральном поле

2

## **Лекция 10.**

Задача Кеплера.

Резерфордовское рассеяние

8

## **Лекция 11.**

Движение твердого тела.

Тензор инерции и энергия вращающегося твердого тела

16

## **Лекция 12.**

Момент импульса твердого тела.

Уравнение движения твердого тела.

Уравнения Эйлера.

Устойчивость вращения

22